Centro Científico Conhecer

CURSO DE CÁLCULO

MÓDULO 4

INTEGRAIS

SUMÁRIO

Unidade 1- Integrais

1.1- Introdução

A derivada é um dos conceitos mais importantes do Cálculo. Outro conceito também muito relevante é o de Integral. Existe uma estreita relação entre essas duas ideias. A operação inversa da derivação é a antiderivação ou integração indefinida.

Newton e Leibniz, bem como os seus seguidores, se envolveram em uma polêmica sobre a originalidade da descoberta do Cálculo, acarretando grande desgaste pessoal a cada um deles. As abordagens deles sobre o tema foram diferentes.

Newton apresenta o seu Método das Fluxões como uma ferramenta que lhe permite aprofundar seus conhecimentos dos fenômenos físicos. Isto é, uma visão cinemática do Cálculo: a derivada vista como uma taxa de variação. Ele considerava x e y variando em função do tempo. Leibniz, por sua vez, considerava x e y variando sobre uma sequência de valores infinitamente próximos. Ele introduziu dx e dy como sendo as diferenças entre os valores nesta sequência.

Newton encarava a integração como um problema de encontrar os x e y de uma determinada fluxão, isto é, achar o deslocamento de uma dada velocidade. Portanto, para ele, a integração era, naturalmente, o processo reverso da diferenciação. Leibniz via a integração como uma soma, no estilo que fizeram, antes dele, Arquimedes, Cavalieri e Roberval. Leibniz foi feliz em utilizar os ‘infinitésimos’ dx e dy onde Newton usou x’ e y’, ou seja, velocidades.

Leibniz usava a palavra ‘mônada' para indicar algo tão simples que não possui partes. Nenhum deles considerava o que nós denominamos de funções, pois este conceito só foi introduzido muitos séculos depois. No entanto, ambos, definitivamente, pensavam em termos de gráficos. De qualquer forma, eles estavam travando uma luta com o infinito, no caso, o infinitamente pequeno.

Apesar de Newton ter desenvolvido sua teoria primeiro, coube a Leibniz o mérito de ter publicado a sua versão, em 1684, introduzindo o termo calculus summatorius, e divulgando assim suas ideias. Leibniz dava muita importância à notação, no que estava absolutamente certo. Leibniz foi quem introduziu os símbolos matemáticos d e f, estabelecendo, por volta de 1675, a notação exatamente como fazemos atualmente.

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} \ .$$

1.2- Integral Indefinida

O estudo das integrais indefinidas é o primeiro passo na compreensão de uma importante ferramenta matemática: a integral. Será introduzida a ideia de integral, mostrando sua relação com a derivada.

Se a função F(x) é primitiva da função f(x), a expressão **F(x) + C** é chamada integral indefinida da função f(x) e é denotada por

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Em que

$\int$ – é chamado sinal de integração.

f(x) – é a função integrando.

dx – é a diferencial que serve para identificar a variável de integração.

C – é a constante de integração.

Observações:

- ✓ Lê – se: Integral Indefinida de f(x) em relação a x ou integral de f(x) em relação a x.
- ✓ O processo que permite calcular a integral indefinida de uma função é denominado integração.

Da definição de integral indefinida temos que

i) $\int f(x)dx = F(x) + C \ \leftrightarrow F'(x) = f(x)$

ii) $\int f(x)dx$ representa uma família de funções, ou seja , o conjunto de todas as primitivas da função integrando.

iii) $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x)$.

Exemplos:

1) Se $\frac{d}{dx}(senx) = cos\, x$ **então** $\int cosx\, dx = senx + C$

2) Se $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ **então** $\int 4x^3 dx = x^4 + C$

3) Se $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ **então** $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$

4) Se $\frac{d}{dx}(tgx) = sec^2 x$ **então** $\int sec^2 x\, dx = tgx + C$

5) Se $\frac{d}{dx}(arctg\, x) = \frac{1}{1+x^2}$ **então** $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arc\, tgx + C$

6) Se $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}\right) = x^{\frac{2}{3}}$ **então** $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^3 + C$

Pelos exemplos acima, temos:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int f(x) dx\right) = f(x)$$

Isso nos permite obter as fórmulas de integração diretamente das fórmulas de diferenciação.

1.3 - Propriedades da Integral Indefinida

Sejam f(x) e g(x) funções reais definidas no mesmo domínio e k uma constante real. Então

a) $\int \mathbf{k.f(x)dx} = \mathbf{k.} \int \mathbf{f(x)dx}$

b) $\int (\mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)})\mathbf{dx} = \int \mathbf{f(x)dx} + \int g(x)\, dx$

1.4 - Algumas Integrais Imediatas

i) $\int dx = x + C$

ii) $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{x+1} + C$, **n ≠ -- 1**

iii) $\int \frac{1}{x}\, dx = ln|x| + C$

iv) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{lna} + C, a > 0,\ a \neq 1$

v) $\int e^x\, dx = e^x + C$

vi) $\int sen\, x\, dx = -cos\, x + C$

vii) $\int cos\, x\, dx = sen\, x\ + C$

viii) $\int tg\, x\, dx = ln\, |secx| + C$

ix) $\int cotg\, dx = ln\, |sen\, x| + C$

x) $\int sec\, x\, dx = ln\, |\, secx\ + tg\, x| +\ C$

xi) $\int cossec\, x\, dx = ln\, |cossec\, x - cotg\, x| + C$

xii) $\int sec\, x.tg\, x\ \ dx = sec\, x\, x + C$

xiii) $\int coxxec\, x\, .cotg\, x\, dx = -cossec\, x\ + C$

xiv) $\int sec^2\, x\, dx = x + C$

xv) $\int cossec^2\, xdx = -cotg\, x + C$

xvi) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\ \ dx = \ \frac{1}{a} arc\, tg\, \frac{x}{a} + C$

xvii) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\ \ dx = \ \frac{1}{2a} |\ \frac{x-a}{x+a}\ \ | + C, x^2 > a^2$

xviii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\ dx = ln\, |x +\ \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

xix) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = ln\, |x +\ \sqrt{x^2 -\ a^2}| + C$

xx) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arc\, sen\, \frac{x}{a} + C\ \ , x^2 < a^2$

xxi) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = arc\, sec\, |\frac{x}{a}| + C$

Exemplos:

a) Calcular $\int (\ 7x^4 + sec^2 x\ )\ \ dx$

Solução:

Das propriedades da integral e da tabela de integrais imediatas, temos:

$$\int\left(7x^4 + \sec^2 x\right)\,dx$$

$$= 7\int x^4\,dx + \int \sec^2 x\,dx$$

$$= 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + C_1 + \operatorname{tg} x + C_2 = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C_1 + C_2,$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Como a soma $(C_1 + C_2)$ é uma nova constante arbitrária, podemos escrever $C_1 + C_2 = C$, daí

$$7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C_1 + C_2 = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C$$

Logo,

$$\int\left(7x^4 + \sec^2 x\right)\,dx = 7\frac{x^5}{5} + \operatorname{tg} x + C$$

Observação: Sempre que aparecer uma soma de duas ou mais integrais indefinidas, escrever apenas uma constante para indicar a soma das várias constantes de integração.

b) Calcular $\int\left(\mathbf{3e^x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4x}} - \mathbf{sen\,x}\right)\mathbf{dx}$

Solução:

$$\int\left(3\,e^x + \frac{1}{4\,x} - \operatorname{sen} x\right)\,dx = \int 3e^x\,dx + \int\frac{1}{4\,x}\,dx - \int \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= 3\int e^x\,dx + \int\frac{1}{4}\frac{dx}{x} - \int \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= 3\int e^x dx + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x} - \int \operatorname{sen} x\,dx$$

$$= 3e^x + \frac{1}{4}\ln|x| - (-\cos\,x) + C$$

$$= 3e^x + \frac{1}{4}\ln|x| + \cos x + C,$$

Portanto,

$$\int\left(3\,e^x + \frac{1}{4\,x} - \operatorname{sen} x\right)\,dx = 3e^x + \frac{1}{4}\ln|x| + \cos x + C$$

c) Calcular $\int (\boldsymbol{4e^{x}} - \frac{\boldsymbol{sen\,x}}{\boldsymbol{cos^2 x}} + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x^5}})\ \boldsymbol{dx}$

Solução:

$$\int\left(4e^{x} - \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x} + \frac{4}{x^5}\right) dx$$

$$= \int 4\,e^{x}\,dx - \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2\,x}\,dx + \int \frac{4}{x^5}\,dx$$

$$= 4\int e^{x}\,dx - \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos x\ \times\ \cos x}\,dx + \int 4 \times \frac{1}{x^5}\,dx$$

$$= 4\int e^{x}\,dx - \int \frac{\text{sen}\,x}{\cos\,x} \times \frac{1}{\cos\,x}\,dx + 4\int x^{-5}\,dx$$

$$= 4\int e^{x}\,dx - \int \text{tg}\,x\ \times\ \sec x\,dx + 4\int x^{-5}\,dx$$

$$= 4\int e^{x}\,dx - \int \sec\,x\ \times\ \text{tg}\,x\,dx\ +\ 4\int x^{-5}\,dx$$

$$= 4\,e^{x} - \sec\,x + 4\ \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C$$

$$= 4\,e^{x} - \sec\,x + 4\ \frac{x^{-4}}{-4} + C$$

$$= 4e^{x} - \sec\,x + \frac{x^{-4}}{-1} + C$$

$$= 4\,e^{x} - \sec\,x - x^{-4} + C$$

$$= 4e^{x} - \sec\,x - \frac{1}{x^4} + C\,.$$

Portanto,

$$\int\left(4\,e^{x} - \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x} + \frac{4}{x^5}\right) dx = 4\,e^{x} - \sec\,x - \frac{1}{x^4} + C$$
.

d) O custo fixo de produção da empresa "SOS" é R$8.000,00. O custo marginal é dado pela função $C'(x) = 0{,}03x^2 + 0{,}12x + 5$**. Determinar a função custo total.**

Solução:

Sabemos que o custo marginal $C'(x)$ é a derivada da função custo total $C(x)$. Assim, para encontrarmos $C(x)$ devemos calcular a integral indefinida da função custo marginal, ou seja,

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \int C'(x)\,dx = \int \left(0{,}03x^2 + 0{,}12x + 5\right)\,dx \\
&= \int 0{,}03x^2 dx + \int 0{,}12x\,dx + \int 5\,dx \\
&= 0{,}03\int x^2 dx + 0{,}12\int x\,dx + 5\int dx \\
&= \frac{0{,}03}{3}x^3 + \frac{0{,}12}{2}x^2 + 5x + K\,.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$C(x) = 0{,}01x^3 + 0{,}06x^2 + 5x + k$$

Quando a produção for nula, x = 0 , o custo fixo será R$8.000,00, ou seja,

$$8.000 = 0{,}01\left(0\right)^3 + 0{,}06\left(0\right)^2 + 5\left(0\right) + k \text{ e } k = 8.000$$

Portanto, a função custo total é $C(x) = 0{,}01x^3 + 0{,}06x^2 + 5x + 8.000$.

e) O custo marginal para produção de determinado bem, é dado pela função $C'(x) = 18\sqrt{x} + 4$. Se o custo fixo é de R$50,00, escreva a função custo total.

Solução:

O custo marginal $C'(x)$ é a derivada da função custo total $C(x)$. Assim, para encontrarmos $C(x)$ devemos calcular a integral indefinida da função custo marginal, ou seja:

$$C(x) = \int C'(x)\,dx = \int\left(18\sqrt{x} + 4\right)\,dx$$

$$= \int\left(18\sqrt{x}\right)dx + \int 4dx = 18\int\sqrt{x}\,dx + 4\int dx$$

$$= 18\int x^{\frac{1}{2}}dx + 4\int dx$$

$$= 18\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + k = 12x^{\frac{3}{2}} + 4x + k\,.$$

Logo,

$$C(x) = 12x^{\frac{3}{2}} + 4x + k$$

Quando a produção for nula, x = 0 , o custo fixo será R$ 50,00, ou seja,

$$50 = 12\cdot(0)^{\frac{3}{2}} + 4\cdot 0 + k \text{ e } k = 50$$

Portanto, a função custo total é

$$C(x) = 12x^{\frac{3}{2}} + 4x + 50$$

f) Calcule $\int(5x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 7)\,dx$.

Solução

$$\int(5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)\,dx$$

$$= 5\int x^4\,dx - 8\int x^3\,dx + 9\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 7\int dx$$

$$= 5\cdot\frac{x^5}{5} - 8\cdot\frac{x^4}{4} + 9\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + 7x + C$$

$$= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + C$$

g) Calcule $\int \sqrt{x}\ (x + \frac{1}{x})dx$.

Solução

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \int x^{1/2}(x + x^{-1})\, dx$$

$$= \int (x^{3/2} + x^{-1/2})\, dx$$

$$= \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \tfrac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{1/2} + C$$

h) Calcule $\int \frac{5t^2+7}{t^{4/3}}\ dt$.

Solução

$$\int \frac{5t^2 + 7}{t^{4/3}}\, dt = 5\int \frac{t^2}{t^{4/3}}\, dt + 7\int \frac{1}{t^{4/3}}\, dt$$

$$= 5\int t^{2/3}\, dt + 7\int t^{-4/3}\, dt$$

$$= 5\left(\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right) + 7\left(\frac{t^{-1/3}}{-\frac{1}{3}}\right) + C$$

$$= 5(\tfrac{3}{5}t^{5/3}) + 7(-3t^{-1/3}) + C$$

$$= 3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C$$

i) Calcule $\int \frac{2cotg\, x - 3\, sen^2 x}{sen\, x}\ dx$

Solução

$$\int \frac{2 \operatorname{cotg} x - 3 \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx$$

$$= 2\int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{cotg} x\, dx - 3\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} dx$$

$$= 2\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\, dx - 3\int \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= 2(-\operatorname{cosec} x) - 3(-\cos x) + C$$

$$= -2 \operatorname{cosec} x + 3 \cos x + C$$

j) Calcule $\int(tg^2x + cotg^2x + 4)dx$.

Solução

$$\int (\text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x + 4)\, dx$$

$$= \int [(\sec^2 x - 1) + (\text{cosec}^2 x - 1) + 4]\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx + \int \text{cosec}^2 x\, dx + 2\int dx$$

$$= \text{tg}\, x - \text{cotg}\, x + 2x + C$$

k) Em qualquer ponto (x,y) de uma determinada curva, a reta tangente tem uma inclinação igual a 4x – 5. Se a curva contém o ponto (3,7), ache sua equação.

Solução:

Como a inclinação da reta tangente a uma curva em qualquer ponto (x,y) é o valor da derivada nesse ponto, temos

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 5$$

$$y = \int (4x - 5)\, dx$$

$$y = 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - 5x + C$$

$$y = 2x^2 - 5x + C$$

A equação anterior representa uma família de curvas. Como queremos determinar uma certa curva dessa família que contenha o ponto (3,7), substituímos x por 3 e y por 7, obtendo

$$7 = 2(9) - 5(3) + C$$

$$7 = 18 - 15 + C$$

$$C = 4$$

Substituindo C por 4, iremos obter a equação da curva pedida.

$$\boldsymbol{y = 2x^2 - 5x + C \leftrightarrow y = 2x^2 - 5x + 4}$$

l) a função custo marginal C' é dada por C(x) = 4x – 8 quando C(x) é o custo total da produção de x unidades. Se o custo da produção de 5 unidades dor R$20,00, ache a função custo total.

Solução Como $C'(x) = 4x - 8$

$$C(x) = \int (4x - 8)\,dx$$
$$= 2x^2 - 8x + k$$

Como $C(5) = 20$, obtemos $k = 10$. Logo,

$$C(x) = 2x^2 - 8x + 10$$

Observe que como o custo marginal deve ser não-negativo, $4x - 8 \geqslant 0$ de modo equivalente, $x \geqslant 2$. Portanto, o domínio de C é $[2, +\infty)$; lembr que embora x represente o número de unidades de uma mercadoria, supo que x seja um número real para dar os requisitos de continuidade para as f ções C e C'.

m) Calcule $\int (3\, secx\, tgx - 5\, cossec^2 x)\, dx$.

Solução:

$$\begin{aligned}\int (3 \sec x \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{cosec}^2 x)\, dx &= 3 \int \sec x \operatorname{tg} x\, dx - 5 \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx \\ &= 3 \sec x - 5(-\operatorname{cotg} x) + C \\ &= 3 \sec x + 5 \operatorname{cotg} x + C\end{aligned}$$

Observação:

As identidades trigonométricas são frequentemente usadas quando calculamos antiderivadas envolvendo funções trigonométricas. As oito identidades a seguir são decisivas:

$\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1$	$\cos x \sec x = 1$	$\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$
$\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$	$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$	$\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x$

n) Calcule $\int (3x + 5) dx$.

$$\int (3x+5)\,dx = \int 3x\,dx + \int 5\,dx$$
$$= 3\int x\,dx + 5\int dx$$
$$= 3\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 5(x + C_2)$$
$$= \tfrac{3}{2}x^2 + 5x + (3C_1 + 5C_2)$$

Como $3C_1 + 5C_2$ é uma constante arbitrária, ela pode ser denotada pc
sim, o resultado pode ser escrito como

$$\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

Pode-se conferir a resposta calculando sua derivada.

$$D_x(\tfrac{3}{2}x^2 + 5x + C) = 3x + 5$$

1.5- Exercícios para praticar

Grupo 1

Determine as seguintes integrais indefinidas:

Respostas

1) $\int (2x^3 + 4x + 1)\,dx$ — 1) $\dfrac{x^4}{2} + 2x^2 + x + k$

2) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$ — 2) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + k$

3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ — 3) $2\sqrt{x} + k$

4) $\int \left(\dfrac{3}{x^2} - 5\right) dx$ — 4) $-\dfrac{3}{x} - 5x + k$

5) $\int \dfrac{x - 7x^3 + 2x^4}{x^4}\,dx$ — 5) $-\dfrac{1}{2x^2} - 7\ln x + 2x + k$

6) $\int (5x^2 - 2e^x + 9)\,dx$ — 6) $\dfrac{5x^3}{3} - 2e^x + 9x + k$

7) $\int x\,(3\sqrt{x} + x)\,dx$ — 7) $\dfrac{6}{5}\sqrt{x^5} + \dfrac{x^3}{3} + k$

8) $\int (2x-1)^3 dx$ — 8) $\dfrac{(2x-1)^4}{8} + k$

Grupo 2

INTEGRAL	RESPOSTAS:
① $\int x\, dx$	$\frac{x^2}{2} + C$
② $\int 2x\, dx$	$x^2 + C$
③ $\int \sqrt{x}\, dx$	$\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$
④ $\int \frac{x^3}{4}\, dx$	$\frac{x^4}{16} + C$
⑤ $\int \frac{dx}{x^5}$	$-\frac{1}{4x^4} + C$
⑥ $\int \left(x^2 + 3x + 1\right) dx$	$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + C$
⑦ $\int \frac{2x^3 - x^2 - 2}{x^2}\, dx$	$x^2 - x + \frac{2}{x} + C$
⑧ $\int x^2 . x^4\, dx$	$\frac{x^7}{7} + C$

Grupo 3

① A função velocidade de um certo movimento é dada por $v(t) = 3t^2 - 20t + 36$, com "t" medido em segundos. Determine a função posição $s(t)$ desse movimento, sabendo que no tempo de 2 segundos o espaço percorrido é de 47 metros.

<u>Resposta:</u> $s(t) = t^3 - 10t^2 + 36t + 7$

② Sabendo que o ponto $(2\ ,\ 5)$ pertence a uma curva de equação $y = f(x)$ e que a declividade da reta tangente em cada ponto da mesma é dada por $2x - 3$, encontre a equação da curva.

<u>Resposta:</u> $y = x^2 - 3x + 7$

✔ <u>**Desafio**</u>

Determine o valor das integrais:

(a) $\int (2x + 1)\, dx$ <u>Resposta:</u> $x^2 + x + C$

(b) $\int (2x + 1)^2\, dx$ <u>Resposta:</u> $\frac{(2x+1)^3}{6} + C$

(c) $\int (2x + 1)^{10}\, dx$ <u>Resposta:</u> $\frac{(2x+1)^{11}}{22} + C$

Grupo 4

INTEGRAL	RESPOSTAS:
① $\int (2x-1)^3 dx$	$\frac{(2x-1)^4}{8}+C$
② $\int x\sqrt{x^2-8)}\ dx$	$\frac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{3}+C$
③ $\int \frac{2\ dx}{(5x-6)^3}$	$-\frac{1}{5\,(5x-6)^2}+C$
④ $\int e^{3x+1}\ dx$	$\frac{e^{3x+1}}{3}+C$
⑤ $\int \frac{dx}{4-3x}$	$-\frac{\ln(4-3x)}{3}+C$
⑥ $\int \left(\frac{e^{3x}}{3}+\frac{2}{5x-4}\right) dx$	$\frac{e^{3x}}{9}+\frac{2\ln(5x-4)}{5}+C$
⑦ $\int \frac{3(x-4)\ dx}{x^2-8x+3}$	$\frac{3\ln(x^2-8x+3)}{2}+C$
⑧ $\int \frac{2\,dx}{x^2+8x+16}$	$-\frac{2}{x+4}+C$
⑨ $\int \frac{x\ dx}{\sqrt[4]{3x^2+8}}$	$\frac{2\sqrt[4]{(3x^2+8)^3}}{9}+C$
⑩ $\int 6\sec^2(5x)\,dx$	$\frac{6\ tg(5x)}{5}+C$
⑪ $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$	$2\ sen\left(\frac{x}{2}\right)+C$
⑫ $\int 2\sec(4x).\ \tan(4x)\,dx$	$\frac{\sec\,(4x)}{2}+C$
⑬ $\int \frac{sen(x)\,dx}{\cos(x)}$	$-\ln(\cos(x))+C$
⑭ $\int \frac{dx}{\csc(7x)}$	$-\frac{\cos(7x)}{7}+C$
⑮ $\int \frac{dx}{x^2+4}$	$\frac{arc\ tg\left(\frac{x}{2}\right)}{2}+C$

Grupo 5

01) $\int\left(3x^2+5+\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx = x^3+5x+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+\ln|x|+k$

02) $\int\frac{dx}{\cos^2(\frac{x}{2})} = 2\ \mathrm{tg}(\frac{x}{2})+k$

03) $\int\left(2\cos x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = 2\mathrm{sen}(x)+2\sqrt{x}+k$

04) $\int\left(2e^x-\frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos^2 x}+\frac{2}{x^7}\right)dx = 2e^x-\sec(x)-\frac{1}{3x^6}+k$

05) $\int(2x^2-3)^2\,dx = \frac{4x^5}{5}-4x^3+9x+k$

06) $\int\frac{dx}{\mathrm{sen}^2(x)} = -\mathrm{cotg}(x)+k$

07) $\int\frac{e^{\cos x}}{\csc(x)}dx = -e^{\cos x}+k$

08) $\int\frac{\sqrt{2}}{3x^2+3}dx = \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{arctg}(x)+k$

09) $\int x^3\sqrt{x}dx = \frac{2}{9}\sqrt{x^9}+k$

10) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx = x-\mathrm{arctg}x+k$

11) $\int\cos(2x)\ \mathrm{tg}(2x)dx = \frac{-\cos(2x)}{2}+k$

12) $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx = x-2\mathrm{arctg}(x)+k$

13) $\int\sqrt{\frac{9}{1-x^2}}dx = 3\mathrm{arcsen}(x)+k$

14) $\int\frac{dx}{(ax)^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\mathrm{arctg}(x)+k$

$$15)\ \int \frac{5}{\sec(5x)}dx = \operatorname{sen}(5x) + k$$

$$16)\ \int \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}dx = \operatorname{tg}(x) - \sec(x) + k$$

$$17)\ \int \operatorname{cotg}(6x)\operatorname{sen}(6x)dx = \frac{1}{6}\operatorname{sen}(6x) + k$$

$$18)\ \int \frac{\sec^2(3x)}{\sqrt{\operatorname{tg}(3x)}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}(3x)} + k$$

$$19)\ \int \frac{3x-3}{(x^2-2x)^3}dx = -\frac{3}{4}(x^2-2x)^{-2} + k$$

$$20)\ \int e^{3x}e^{2x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} + k$$

$$21)\ \int \frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{3}{2}\ln(1+e^{2x}) + k$$

$$22)\ \int e^{2x^2-4x}(x-1)dx = \frac{1}{4}e^{2x^2-4x} + k$$

$$23)\ \int \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}dx = -2\sqrt{\cos(x)} + \frac{2}{5}\sqrt{\cos^5(x)} + k$$

$$24)\ \int \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(\cos(x))dx = \cos(\cos(x)) + k$$

$$25)\ \int \frac{\sec^3(x)}{\operatorname{tg}^4(x)}dx = -\frac{1}{3\operatorname{sen}^3(x)} + k$$

$$26)\ \int (\operatorname{tg}(3x) + \operatorname{cotg}(3x))^2 dx = \frac{1}{3}(\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{cotg}(3x)) + k$$

$$27)\ \int \frac{e^x}{7+e^{2x}}dx = \frac{\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{\sqrt{7}}\right) + k$$

$$28)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-9x^4}} = \frac{1}{6}\operatorname{arcsen}\left(\frac{3x^2}{4}\right) + k$$

$$29)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{16x^2-9}} = \frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\left(\frac{4x}{3}\right) + k$$

$$30)\ \int \frac{\ln x}{x\ln(x^2)}dx = \frac{\ln|x|}{2} + k$$

1.6- Algumas Técnicas de Antidiferenciação

Muitas antiderivadas não podem ser calculadas diretamente. E então, faz-se necessário aprender certas técnicas que devem ser usadas no cálculo de tais antiderivadas. Vamos apresentar técnicas que requerem a Regra da Cadeia para antidiferenciação e aquelas que envolvem uma mudança de variável.

Exemplificando:

Para diferenciar $\frac{1}{10}(1+x^2)^{10}$ aplicamos a Regra da Cadeia para diferenciação e obtemos

$$D_x\left[\tfrac{1}{10}(1+x^2)^{10}\right] = (1+x^2)^9(2x)$$

Suponha que desejamos antidiferenciar

$$(1+x^2)^9(2x).$$

Então, precisamos calcular

$$\int (1+x^2)^9(2x\,dx)$$

Para chegarmos a um procedimento que possa ser usado em tal situação, seja

$$g(x) = 1 + x^2 \qquad g'(x)\,dx = 2x\,dx$$

Então,

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx]$$

$$\int u^9\,du = \tfrac{1}{10}u^{10} + C$$

Assim,

$$\int [g(x)]^9[g'(x)\,dx] = \tfrac{1}{10}[g(x)]^{10} + C$$

$$\int (1+x^2)^9(2x\,dx) = \tfrac{1}{10}(1+x^2)^{10} + C$$

Teorema: A Regra da Cadeia para a Antidiferenciação

> Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então,
>
> $$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

Prova: Por hipótese

$$F'(g(x)) = f(g(x)) \qquad (\mathrm{I})$$

Pela Regra da Cadeia para diferenciação,

$$D_x[F(g(x))] = F'(g(x))[g'(x)]$$

Substituindo (I) nessa equação, obtemos

$$D_x[F(g(x))] = f(g(x))[g'(x)]$$

Da qual segue que

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

Como queríamos demonstrar.

Fórmula da potência generalizada para antiderivadas

Teorema

> Se g for uma função diferenciável e se n for um número racional,
>
> $$\int [g(x)]^n[g'(x)\,dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Exemplos:

1) Calcule $\int \sqrt{3x+4}\ \ dx$

Solução:

$$\int \sqrt{3x+4}\ \ dx = \int (3x+4\,)^{\frac{1}{2}}\ dx$$

Observamos que, se

$$g(x) = 3x + 4 \quad \text{então} \quad g'(x)\,dx = 3\,dx$$

Logo, precisamos de um fator 3 que acompanhe dx para dar g'(x) dx. Assim sendo, escrevemos

$$\int (3x+4)^{1/2}\,dx = \int (3x+4)^{1/2}\,\tfrac{1}{3}(3\,dx)$$
$$= \tfrac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx)$$

$$\frac{1}{3}\int (3x+4)^{1/2}(3\,dx) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \tfrac{2}{9}(3x+4)^{3/2} + C$$

2) Ache $\int x^2\,(5+2\,x^{\,3})^8\ \ dx$ **.**

Solução:

Observe que, se

$$g(x) = 5 + 2x^3 \quad \text{então} \quad g'(x)\,dx = 6x^2\,dx$$

Como

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \int (5+2x^3)^8(x^2\,dx)$$

precisamos de um fator 6 que acompanhe x² dx para obter g' (x) dx. Assim escrevemos

$$\int x^2(5+2x^3)^8\,dx = \frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx)$$

$$\frac{1}{6}\int (5+2x^3)^8(6x^2\,dx) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(5+2x^3)^9}{9} + C$$

A Regra da Cadeia para a antidiferenciação é

$$\int f(g(x))[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + C$$

em que F é uma antiderivada de f. Se nessa fórmula f for a função cosseno, então F será a função seno e teremos

$$\int \cos(g(x))[g'(x)\,dx] = \operatorname{sen}(g(x)) + C$$

Unidade 2- Técnicas de Integração

2.1- Técnicas de Integração – Substituição Simples

Qual é a diferença entre estes dois objetos matemáticos?

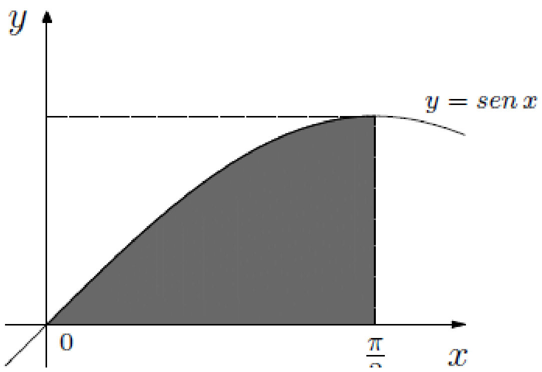
$$\int sen\, x\, dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\, x\, dx$$

Uma resposta simples seria que a diferença está nos limites de integração (o e $\frac{\pi}{2}$). Mas, indo além, podemos dizer que o símbolo da esquerda representa uma família de funções, ao passo que o da direita representa um número. Especificando:

$$\int \text{sen } x\, dx = -\cos x + C \qquad \text{e} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x\, dx = 1.$$

Para cada C ϵ $\mathbb{R}$, a função definida por F(x) = – cos x + C é uma primitiva de f(x) = sen x . Na verdade, $\frac{dF}{dx}(x) = (-\cos x + C)' = sen\, x = f(x), \forall\, x \,\epsilon\, \mathbb{R}$.

O número $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ x\ dx = 1$ pode ser visto como a área da região limitada pelo gráfico da função f(x) = sen x, pelo eixo Ox e sobre o intervalo [o e $\frac{\pi}{2}$].



Compreender essas diferentes abordagens da integral consiste em ter uma visão geral da teoria de integração. O Teorema Fundamental do Cálculo nos permite usar a integral indefinida $\int f(x)dx$ para calcular a integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Isto é, se soubermos que F(x) é uma primitiva de f(x), então temos: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Devemos nos lembrar que integrar, no sentido de determinar a família de primitivas de uma função é o processo inverso da derivação.

2.1.1 - A Regra da Cadeia e a Antiderivação

Considerando $\int sen3x\ dx$, quais são as funções F(x) tais que F' (x) = sem 3x?

Obs.: A Regra da Cadeia nos mostra como derivar uma função composta por outras duas funções: (fog)'(x) = f '(g(x))g'(x).

Vamos observar o seguinte exemplo: $\int senx\, dx = -\cos x + C$.

Com base nesse exemplo, vamos experimentar G(x) = – cos 3x para obter uma primitiva de f(x) = sen 3x. Quando derivamos a função G(x), usamos a Regra da Cadeia e encontramos G'(x) = 3sen 3x. Mas desejamos f(x)=sen3x. A diferença, todavia, é somente o produto por uma constante, o número 3. Precisamos fazer um pequeno ajuste utilizando a propriedade das integrais explicitada abaixo:

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \int \lambda\, f(x)dx = \lambda. \int f(x)dx$$

Usando $F(x) = \frac{G(x)}{3}$ resposta desejada: $\int sen3x\, dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C$.

Fazendo o teste da derivada:

Se $F(x) = -\frac{\cos x}{3}$ + C , então $F'(x) = -\frac{1}{3}.(-sen\, 3x).3 = sen\, 3x$. O que mostra que nossos cálculos estão corretos.

Com esse exemplo apresentamos uma ideia básica da técnica de substituição simples, em que foi usada a propriedade de integrais para reescrever o integrando de forma adequada para podermos integrar. Foi utilizado o fato de que a integral indefinida é o processo inverso da derivação fazendo uso da Regra da Cadeia.

Assim, revisando: $\int sen3x\, dx = \frac{1}{3}.3 \int sen3x\, dx = \frac{1}{3}\int 3.sen3x\, dx = \frac{1}{3}\int sen3x.3dx = -\frac{1}{3}$ cos x + C.

Exemplos:

a) Calcular $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\, cosx^2\, dx$.

Inicialmente devemos calcular a integral indefinida e, a seguir, usaremos uma das primitivas para descobrir a integral definida, utilizando o Teorema Fundamental.

Para começar precisamos procurar qual a integral mais simples que se "parece" com a que queremos integrar. Nesse caso, a mais simples é: $\int \cos u \, du = sen\, u + C$.

Levando em conta a Regra da Cadeia, observamos que fizemos u(x)=x². Temos u' (x) = 2x. Dando continuidade, fazemos G(x) = sem (u(x)) = senx². Assim, G'(x) = (cos(u(x)))(u'(x)) = (cos x²)(2x) = 2 x cos x² . Agora é só fazer o ajuste da constante:

$\int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int 2\, x \,.\cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 . 2x \, dx = \frac{1}{2}\, sen\, x^2 + C.$

Vamos verificar se a resposta está correta:

Se $F(x) = \frac{1}{2}\, sen\, x^2 + C$, então $F'(x) = \frac{1}{2}$ cos x². 2x = cos x².

Agora, basta calcular a integral definida:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2}\, sen\, x^2 |_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\, sen\, (\, \pi\,) - sen\, (\, 0\,) = 0$$

Outra forma de abordar esse cálculo é usar a noção de diferencial. A diferencial de u = x² é du = 2x dx. Desse modo, temos:

$\int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 . 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \mathrm{sen\ u} + \mathrm{C} = \frac{1}{2} sen\, x^2 + C.$

Aplicando a noção de diferencial é possível compreender o nome que foi dado a essa técnica de integração: substituindo x² por u, levando em consideração a diferencial du. Para tanto, fazemos os ajustes necessários nas constantes, usando a propriedade das integrais.

Obs.: A diferencial da função diferenciável y = f (x) é dy = f ' (x) dx.

b) Calcular $\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} \;\; dx$.

Lembrete: $\int \sqrt{u} \, \mathrm{du} = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$.

Observando o integrando $x^3 \sqrt{x^4 + 1}$, fazendo $u = x^4 + 1$, a diferencial será du = 4x³ dx . Logo, para fazer a substituição fica faltando apenas o ajuste no integrando. Assim,

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} . 4 . \int \sqrt{x^4 + 1} . x^3 dx = \frac{1}{4} \int (x^4 \; +1)^{\frac{1}{2}} . 4x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{4} . \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} (x^4 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

2.1.2 - A Fórmula da Substituição Simples

Teorema: Se u = g(x) é uma função diferenciável, f é uma função contínua e Im(g)C Dom(f), então $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F\big(g(x)\big) + C$, em que F é uma primitiva de f.

Demonstração:

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia:

O cálculo $\frac{d}{dx}(F\big(g(x)\big) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$ mostra que F(g(x)) é uma primitiva da função $\boldsymbol{f\big(g(x)\big)g'(x)}$ **.**

Exemplos:

a) Calcular $\int \boldsymbol{e^{5x}\, dx}$.

Solução:

Fazendo u = 5x, temos du = 5 dx e a integral fica: $\int e^{5x}\, dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}\, 5dx = \frac{1}{5}\int e^{u}\, du = \frac{1}{5}e^{u} + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C$.

b) Calcular $\int (\boldsymbol{x^3} + \mathbf{1})^{\mathbf{4}}\boldsymbol{x^2 dx}$.

Solução:

Fazendo u = x^3 + 1, temos du = $3x^2$ dx. Então:

$$\int (\, x^3 + 1\,)^4 x^2 dx = \frac{1}{3}\int (\, x^3 + 1\,)^4 3x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^4 du = \frac{1}{3}.\frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{15}(x^3 + 1)^5 + \ C.$$

c) Calcular $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$.

Solução:

Fazer $\begin{cases} u = 1 + x^2 \\ du = 2x\, dx \end{cases}$

Essa substituição nos remeterá à integral simples:

$\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C$.

Agora, devemos expressar a resposta em termos da variável original:

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2) + C.$$

Obs.: Observe que, como $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$, pode-se escrever $\ln(1 + x^2)$ no lugar de $\ln|1 + x^2|$.

Lembretes para fazer uso eficiente da substituição:

- ✓ Encontre uma integral "simples" que fará o papel de $\int f(u)du$.
- ✓ Faça os eventuais ajustes das constantes para substituir g '(x)dx por du.
- ✓ Após integrar, não se esquecer de desfazer a substituição, apresentando a resposta em termos da variável original.

2.2- Substituição e as Integrais Definidas

Teorema: Seja g função de classe C e f uma função contínua. Suponhamos que [a,b] C Dom (g) e g ([a,b]) C Dom (f) . Então temos:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Demonstração:

Como a função f é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que ela admite uma primitiva. Seja F esta primitiva. Isto é, $\forall\ x \in$ Dom(f), $F'(x)=f(x)$. O Teorema Fundamental nos diz ainda que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du \;=\; F(g(b)) - F(g(a)). \qquad \text{(I)}$$

Por outro lado, a Regra da Cadeia nos mostra que:

$$\left(F(g(x))\right)' \;=\; F'(g(x)) \cdot g'(x) \;=\; f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Sendo a função g de classe C, notamos que a função g' é uma função contínua. Dessa forma y(x) = f(g(x)). G'(x) é uma função contínua, logo satisfaz a hipótese do Teorema Fundamental. Temos:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; F(g(b)) - F(g(a)). \qquad (\text{ II })$$

Segue de (I) e (II) que:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Observação:

Uma função g é de classe C quando é diferenciável e, além disso, a sua função diferenciável g' é uma função contínua.

Exemplos:

a) Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \boldsymbol{tg\ x\ dx}$.

Solução: Inicialmente vamos calcular a primitiva da função tg x e, após, encontrar a integral definida. Devemos lembrar da definição da tangente:

$$\operatorname{tg}\, x \;=\; \frac{\operatorname{sen}\, x}{\cos\, x}.$$

Assim, nosso problema se transformou:

$$\int \operatorname{tg}\, x\, dx \;=\; \int \frac{\operatorname{sen}\, x}{\cos\, x}\, dx.$$

Agora, podemos fazer a substituição necessária.

$$\begin{cases} u &= \cos x \\ du &= -\operatorname{sen} x\, dx. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg} x\, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \\
&= -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \\
&= -\int \frac{du}{u} = \\
&= -\ln|u| + C = \\
&= -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C.
\end{aligned}$$

Fazendo o teste da derivada mostramos que encontramos a resposta correta.

$$(\ln|\sec x|)' = \frac{1}{\sec x} \cdot (\sec x)' = \frac{1}{\sec x} \cdot (\sec x \cdot \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x.$$

Podemos calcular a integral definida;

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = \ln|\sec x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} &= \ln|\sec(\pi/4)| - \ln|\sec(0)| = \\
&= \ln\sqrt{2} - \ln 1 = \ln\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Para calcular a integral definida:

- ✓ **Inicialmente calcular a integral indefinida, usando a substituição adequada.**
- ✓ **Após usar uma das primitivas para, com o Teorema Fundamental do Cálculo, calcular a integral definida.**

Ou

Existe uma maneira mais direta de efetuar esse cálculo – ao fazer a substituição ocorre uma mudança de variável. Basta fazer o correspondente ajuste nos limites de Integração.

b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$

Solução: Precisamos descobrir que substituição podemos usar. Como o integrando é composto e observando que a derivada da primeira parte é a segunda, a escolha já está definida.

$$\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\, dx \end{cases}$$

Vamos considerar agora a mudança nos limites de integração: enquanto x varia de 1 a e , u varia de ln 1= 0 a ln e = 1.

$$\begin{cases} a = 1 \ \rightarrow g(a) = \ln = 0 \\ b = e \ \rightarrow g(b) = \ln e = 1 \end{cases}$$

Efetuando o cálculo:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_0^1 u\, du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

c) Calcular $\int t\sqrt{1+t}\ dt$**).**

Solução:

Fazendo u = 1 + t, teremos du = dt.

Assim:

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}} \ \text{ e } \ dt = du.$$

Escrevendo o integrando em termos da variável u:

$$u = 1 + t \ => t = 1 - 1$$

Fazendo a substituição, temos:

$$\begin{aligned}
\int t\sqrt{1+t}\,dt &= \int t\,(1+t)^{\frac{1}{2}}\,dt = \\
&= \int (u-1)\,u^{\frac{1}{2}}\,du = \\
&= \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\,du = \\
&= \int u^{\frac{3}{2}}\,du - \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \\
&= \tfrac{2}{5}\,u^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + C = \\
&= \tfrac{2}{5}\,(1+t)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}\,(1+t)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

Fazendo o “teste da derivada”:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}\,(1+t)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\,(1+t)^{\frac{3}{2}}\right) &= (1+t)^{\frac{5}{2}-1} - (1+t)^{\frac{3}{2}-1} = \\
&= (1+t)^{\frac{3}{2}} - (1+t)^{\frac{1}{2}} = \\
&= (1+t)(1+t)^{\frac{1}{2}} - (1+t)^{\frac{1}{2}} = \\
&= [1+t-1](1+t)^{\frac{1}{2}} = \\
&= t\sqrt{1+t}.
\end{aligned}$$

Isso comprova que $F(t) = \frac{2}{5}(1+t)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}$ é uma primitiva da função $f(t) = t\sqrt{1+t}$.

d) Calcular

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$$

Solução: Devemos nos lembrar de que e ^{2x} = (e ^{x}) ^{2} e que a derivada da função y=arctg x é $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Assim, podemos fazer $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases}$ **para obter** $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int \frac{1}{1+u^2}\, du$ **.**

Além disso, temos mudança de limites de integração:

$$\begin{cases} a & = & 0 & \Longrightarrow & g(a) & = & e^1 & = & 1 \\ b & = & \ln\sqrt{3} & \Longrightarrow & g(b) & = & e^{\ln\sqrt{3}} & = & \sqrt{3}. \end{cases}$$

Dessa forma:

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\, du = \operatorname{arctg} u \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

2.3- Técnicas de Integração – Integração por Partes

Da fórmula da derivada do produto de duas funções obtém-se um método de integração muito conveniente denominado integração por partes. Se f e g forem funções diferenciáveis, então:

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x)g'(x) = D_x[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

Integrando ambos os membros, obtém-se:

$$\int f(x)g'(x)\, dx = \int D_x[f(x)g(x)]\, dx - \int g(x)f'(x)\, dx$$

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx} \qquad \textbf{(I)}$$

Chamaremos (I) de fórmula de integração por partes. Para efeito de cálculo existe uma maneira mais prática de escrever essa fórmula, tomando

$$u = f(x) \qquad \text{e} \qquad v = g(x)$$

Então:

$$du = f'(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad dv = g'(x)\,dx$$

Desse modo, (I) torna – se

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du} \qquad \textbf{(II)}$$

Essa fórmula expressa a integral $\int \boldsymbol{u\,dv}$ em termos de outra integral, $\int \boldsymbol{v\,du}$. Escolhendo de forma adequada u e dv, pode ser mais fácil calcular a segunda do que a primeira. Quando escolhem os as substituições para u e dv, geralmente pretendemos que dv seja o fator do integrando mais complicado que se possa integrar diretamente, e que u seja uma função cuja derivada seja uma função mais simples.

Exemplos:

a) Calcular $\int \boldsymbol{x \ln x\; dx}$.

Solução:

Para determinar quais as substituições para u e dv, devemos nos lembrar que para encontrar v precisamos saber eintegrar dv. Isso sugere que dv = x dx e u = ln x. Então,

$$v = \frac{x^2}{2} + C_1 \qquad \text{e} \qquad du = \frac{dx}{x}$$

Da fórmula

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Obtemos:

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) - \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x + C_1 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx - C_1 \int \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x + C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} - C_1 \ln x + C_2$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C_2$$

Nesse exemplo, observe que a primeira constante de integração C_1 não aparece na resposta final. C_1 foi usada apenas para mostrar que todas as escolhas de v da forma ½ x^2 + C_1 produzem o mesmo resultado para $\int \boldsymbol{x} \ln \boldsymbol{x} \;\, \boldsymbol{dx}$. Essa situação vale em geral e demonstramos isso escrevendo v + C_1 na fórmula (II) :

$$\int u \, dv = u(v + C_1) - \int (v + C_1) \, du$$

$$= uv + C_1 u - \int v \, du - C_1 \int du$$

$$= uv + C_1 u - \int v \, du - C_1 u$$

$$= uv - \int v \, du$$

Torna-se desnecessário escrever C_1 quando calculamos v a partir de dv.

A resposta do exemplo a pode ser escrita como:

$$\tfrac{1}{2}x^2(\ln x - \tfrac{1}{2}) + C$$

Verificamos esse resultado calculando a derivada de um produto.

$$D_x\left[\frac{1}{2}x^2(\ln x - 1)\right] = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}x + x \ln x - \tfrac{1}{2}x$$

$$= x \ln x$$

b) Calcular $\int \boldsymbol{x}^3 \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}^2} \, \boldsymbol{dx}$.

Solução:

Usamos a integração por partes dv = x e^{x^2} dx e u = x^2. Então v = ½ e^{x^2} e du = 2x dx.

Da fórmula (II)

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = x^2\left(\tfrac{1}{2}e^{x^2}\right) - \int \left(\tfrac{1}{2}e^{x^2}\right)2x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

c) Calcular $\int \boldsymbol{x\,cox\ \ dx}$.

Solução: Seja u = x e dv = cos x dx. Então du = dx e v = sen x. Assim:

$$\int x\cos x\,dx = x\,\text{sen}\,x - \int \text{sen}\,x\,dx$$
$$= x\,\text{sen}\,x + \cos x + C$$

d) Calcular $\int \boldsymbol{tg^{-1}\,x\ \ dx}$.

Solução: Seja u = tg^{-1} x e dv = dx. Então:

$$\int \text{tg}^{-1}\,x\,dx = x\,\text{tg}^{-1}\,x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$
$$= x\,\text{tg}^{-1}\,x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Quando e como usar a integração por partes?

Ao aprender uma nova técnica, pode acontecer de sermos tentados a usá-la indiscriminadamente. Dada uma integral, qual é a técnica mais adequada para resolvê-la?

Alguns lembretes que podem ajudar a fazer bom uso da integração por partes. Revendo a fórmula a ser usada:

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

- Para aplicar a fórmula, deve-se dividir o integrando em duas partes.

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = ? \\ \boldsymbol{dv} = ? \end{cases}$$

- Será necessário integrar $\int \boldsymbol{dv}$ para obter uma função que fará o papel de v.
- A nova integral, $\int \boldsymbol{v\,du}$, deve ser mais ou tão simples quanto a integral original , $\int \boldsymbol{udv}$.

e) Calcular $\int \boldsymbol{x^2 \cos x\, dx}$.

Solução: Analisando a escolha:

$$\begin{cases} u & = & x^2 \\ dv & = & \cos\ x\,dx \end{cases}.$$

A integral $\int \boldsymbol{dv} = \int \boldsymbol{\cos x\, dx}$ é uma integral direta. Essa escolha de u e de dv determina

$$\begin{cases} du & = & 2x\,dx \\ v & = & \text{sen}\ x \end{cases}$$

e a fórmula de integração por partes nos dá

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos\ x\,dx &= x^2\ \text{sen}\ x - \int (\text{sen}\ x)\,2x\,dx = \\ &= x^2\ \text{sen}\ x - \int 2x\ \text{sen}\ x\,dx. \end{aligned}$$

(i)

A nova integral, $\int x\,sen\,x\,dx$, é tecnicamente mais fácil do que a integral original, pois o grau do fator x ² diminuiu. Agora podemos aplicar a mesma técnica nessa nova integral.

Escolhemos :
$$\begin{cases} u &= x \\ dv &= \text{sen } x\,dx. \end{cases}$$

Essa escolha nos dá :

$$\begin{cases} du &= dx \\ v &= -\cos x \end{cases}.$$

Aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} \int x \text{ sen } x\,dx &= -x \cos x - \int(-\cos x)\,dx = \\ &= -x \cos x + \text{sen } x + C_1. \end{aligned}$$

(ii)

Reunindo (i) e (ii) , obtemos:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x\,dx &= x^2 \text{ sen } x - 2[-x \cos x + \text{sen } x + C_1] = \\ &= x^2 \text{ sen } x + 2x \cos x - 2\,\text{sen } x + C. \end{aligned}$$

Realmente, se F(x) = (x^2 - 2) sen x + 2x, então:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x \text{ sen } x + (x^2 - 2) \cos x + 2 \cos x - 2x \text{ sen } x = \\ &= x^2 \cos x, \end{aligned}$$

f) Calcular $\int e^x\,\mathbf{sen}\,x\,dx$ **.**

Solução: Seja u = e^x e dv = sen x dx. Então du = e^x dx e v = − cos x . Logo,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

A integral do segundo membro é semelhante à primeira integral. Exceto que em vez de sen x temos cos x. Aplicamos a integração por parte novamente, sendo $\bar{u} = e^x$ e $d\bar{v} = \cos x\, dx$. Então,

$$d\bar{u} = e^x\, dx \quad \text{e} \quad \bar{v} = \operatorname{sen} x$$

Assim,

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\right)$$

Agora temos no segundo membro a mesma integral que no primeiro. Dessa forma, se somarmos $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ a ambos os membros da igualdade, teremos

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x + 2C$$

Observe que o segundo membro da igualdade acima possui uma constante arbitrária, pois no primeiro membro temos uma integral indefinida. Essa constante arbitrária foi escriuta como 2C; assim quando dividirmos por 2 os membros da igualdade, a constante arbitrária na resposta será C. Desse modo, temos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

g) Calcular $\int arc\, tg\, x\, dx$.

Solução: Para usarmos a integração por partes só temos uma escolha:

$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = dx \end{cases} \implies \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx \\ v = x. \end{cases}$$

E, assim , temos

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx \;=\; x \operatorname{arctg} x \;-\; \int \frac{x}{1+x^2}\, dx. \qquad \text{(I)}$$

Aqui devemos usar a substituição simples. Veja o exemplo:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2} \ln (1+x^2) \;+\; C_1. \qquad \text{(II)}$$

Reunindo as duas igualdades, (I) e (II), temos:

$$\boxed{\int \operatorname{arctg} x\, dx \;=\; x \operatorname{arctg} x \;-\; \frac{1}{2} \ln (1+x^2) \;+\; C.}$$

h) Calcular $\int \mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}\;\; \boldsymbol{dx}$.

Solução: A escolha de u e de dv é clara.

$$\begin{cases} u &= \ln x \\ dv &= dx \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} du &= \dfrac{1}{x}\, dx \\ v &= x. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \ln x\, dx \;&=\; x \ln x \;-\; \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \;= \\ &=\; x \ln x \;-\; \int dx \;= \\ &=\; x \ln x \;-\; x \;+\; C, \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\boxed{\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C.}$$

i) Calcular $\int \boldsymbol{e^{2x}} \, \mathbf{sen}\, \boldsymbol{x} \, \boldsymbol{dx}$.

Solução: Fazendo a seguinte escolha de u e de dv:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & e^{2x} \\ dv & = & \operatorname{sen} x \, dx \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{lcl} du & = & 2e^{2x} \, dx \\ v & = & -\cos x. \end{array}\right.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} I = \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx &= -e^{2x} \cos x - \int (-\cos x) \, 2e^{2x} \, dx = \\ &= -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Aplicando novamente a integral por partes na nova integral

$$\left\{\begin{array}{lcl} u & = & e^{2x} \\ dv & = & \cos x \, dx \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{lcl} du & = & 2e^{2x} \, dx \\ v & = & \operatorname{sen} x, \end{array}\right.$$

temos

$$\begin{aligned} I &= -e^{2x} \cos x + 2\left(e^{2x} \operatorname{sen} x - 2 \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx\right) \\ I &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x - 4I \\ 5I &= e^{2x} (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + C_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$I = \int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^{2x}}{5} (2 \operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

j) Calcular $\int_1^e \boldsymbol{x} \ln \boldsymbol{x} \, \boldsymbol{dx}$.

Solução: Fazendo a escolha de u e de dv.

$$\begin{cases} u & = & \ln x \\ dv & = & x\,dx \end{cases} \implies \begin{cases} du & = & \dfrac{1}{x}\,dx \\ v & = & \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Essa escolha resulta em

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x\,dx &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2 \frac{1}{x}\,dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \\ &= \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Resumindo, podemos aplicar a fórmula seguinte:

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.}$$

2.4- Técnicas de Integração – Integração de Potências e Produtos de Funções Trigonométricas

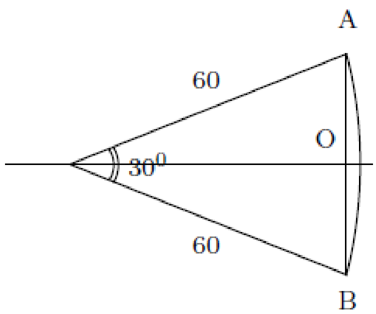
Embora o conceito de função seja relativamente novo, as funções trigonométricas são conhecidas desde a Antiguidade, na forma de tabelas.

Para resolver problemas de Trigonometria aprendemos os valores de seno e de cosseno de alguns arcos notáveis.

θ	sen θ	cos θ
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

As primeiras tabelas trigonométricas foram construídas por Hiparco de Niceia (180 – 125 a. C.) o que lhe rendeu o direito de ser chamado de “Pai da Trigonometria”. As principais contribuições de Hiparco à Astronomia foram a organização dos dados obtidos empiricamente pelos babilônios, bem como a elaboração de um catálogo estrelar. A tabela trigonométrica que ele construiu associa a cada ângulo inteiro o comprimento da corda que esse ângulo determina em um círculo de raio igual a 60. Por exemplo:

$$\text{corda}(30^o) = AB = 2 \times 60 \times \text{sen}\ (15^o) \approx 31,058.$$



AO = OB = 60 sen(15^0)

Revendo algumas identidades trigonométricas:

a) $\boldsymbol{tg\ x} = \frac{\boldsymbol{sen\ x}}{\boldsymbol{\cos\ x}}$

b) $\boldsymbol{cotg\ x} = \frac{\boldsymbol{\cos\ x}}{\boldsymbol{sen\ x}}$

c) $\mathbf{sec\,x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos\,x}}$

d) $\boldsymbol{cossec\, x = \frac{1}{sen\, x}}$

e) $\boldsymbol{sen^2 x + cos^2 x = 1}$

f) $\boldsymbol{sec^2 x = 1 + tg^2 x}$

g) $\boldsymbol{cossec^2 x = 1 + cotg^2 x}$

h) $\boldsymbol{sen\,(a \pm b) = sena\, a.cos\, b \,\pm\, senb.cos\, a}$

i) $\boldsymbol{\cos\,(a \pm b) = \cos a.cosb \mp sen\, a.sen\, b}$

j) $\boldsymbol{\cos\, 2x = \cos^2 x - sen^2 x}$

k) $\boldsymbol{\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\, x \quad ou \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2\, x}{2}}$

l) $\boldsymbol{\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\, x \quad ou \quad sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$

m) $\boldsymbol{sen\, 2x = 2\, sen\, x\, .\cos x}$

2.4.1- Integração de Potências de Seno e Cosseno

Caso 1:

$\int \operatorname{sen}^n u\, du$ ou $\int \cos^n u\, du$, onde n é um inteiro ímpar.

Exemplos:

a) Calcular $\int \boldsymbol{cos^3 x\, dx}$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x(\cos x\, dx) \\
&= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)(\cos x\, dx) \\
&= \int \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx
\end{aligned}
$$

Para a segunda integral do lado direito observamos que sendo $\boldsymbol{d(sen\, x) = \cos\, x\, dx}$, temos:

$$\int \operatorname{sen}^2 x(\cos x\, dx) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C_1$$

Como a primeira integral do lado direito é sen x + C_2

$$\int \cos^3 x\, dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

b) Calcular $\int \boldsymbol{sen^5\, x\, dx}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \int \operatorname{sen} x\, dx - 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= -\cos x + 2\int \cos^2 x(-\operatorname{sen} x\, dx) - \int \cos^4 x(-\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C
\end{aligned}$$

Caso 2:

$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$, onde pelo menos um dos expoentes é ímpar.

Obs.: a solução deste caso é semelhante à do caso 1.

Exemplos:

a) Calcular $\int \boldsymbol{sen^3\, x\,.\cos^4 x\, dx}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x(\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x(\operatorname{sen} x\, dx) \\
&= \int \cos^4 x \operatorname{sen} x\, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x\, dx \\
&= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$

Caso 3:

$$\int \text{sen}^n\, u\, du \text{ e } \int \cos^n u\, du, \text{ onde } n \text{ é um inteiro par.}$$

Obs.: O método utilizado nos casos 1 e 2 não funcionam neste caso. Usaremos as seguintes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}^2\, x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Exemplo:

a) Calcular $\int \boldsymbol{sen^2\, x\, dx}$.

Solução:

$$\int \text{sen}^2\, x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\, 2x + C$$

Caso 4:

$$\int \text{sen}^n\, x \cos^m x\, dx, \text{ ambos } m \text{ e } n \text{ são pares.}$$

Obs.: A solução deste caso é semelhante à do caso 3.

Exemplos:

a) Calcular $\int \boldsymbol{sen^2\, x . cos^4 x\, dx}$.

Solução:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx - \frac{1}{8}\int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\, dx$$

$$= \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{1}{8}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} + C$$

$$= \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{48} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{64} + C$$

b) Calcular $\int \boldsymbol{sen^4 x . cos^4 x\, dx}$.

Solução:

Se usarmos a identidade $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$, teremos

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{16}\int \operatorname{sen}^4 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{64}\int \cos^2 4x\, dx$$

$$= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{1}{64}\int \frac{1+\cos 8x}{2}\, dx$$

$$= \frac{x}{64} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C$$

$$= \frac{3x}{128} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{128} + \frac{\operatorname{sen} 8x}{1024} + C$$

O próximo exemplo envolve um tipo de integral contendo um produto de seno e cosseno

c) Calcular $\int sen\, 3x\,.\cos 2x\ dx$.

Solução:

Obs.: Usaremos as seguintes identidade trigonométrica:

$$\text{sen}\, mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}(m-n)x + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}(m+n)x$$

$$\begin{aligned}\int \text{sen}\, 3x \cos 2x\, dx &= \int \left(\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, x + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 5x\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int \text{sen}\, x\, dx + \tfrac{1}{2}\int \text{sen}\, 5x\, dx \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{10}\cos 5x + C\end{aligned}$$

2.4.2- Integração de Potências da Tangente, da Cotangente, da Secante e da Cossecante

Vamos lembrar algumas fórmulas envolvendo tangente, cotangente, secante e cossecante:

$$\int \text{tg}\, u\, du = \ln|\sec u| + C \qquad \int \text{cotg}\, u\, du = \ln|\text{sen}\, u| + C$$

$$\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \text{tg}\, u| + C \qquad \int \text{cosec}\, u\, du = \ln|\text{cosec}\, u - \text{cotg}\, u| + C$$

$$\int \sec^2 u\, du = \text{tg}\, u + C \qquad \int \text{cosec}^2 u\, du = -\text{cotg}\, u + C$$

$$\int \sec u\, \text{tg}\, u\, du = \sec u + C \qquad \int \text{cosec}\, u\, \text{cotg}\, u\, du = -\text{cosec}\, u + C$$

Com essas fórmulas e as identidades trigonométricas

$$1 + \text{tg}^2 u = \sec^2 u \qquad 1 + \text{cotg}^2 u = \text{cosec}^2 u$$

podemos calcular integrais da forma

$$\int \text{tg}^m u \sec^n u\, du \quad \text{e} \quad \int \text{cotg}^m u\, \text{cosec}^n u\, du$$

onde m e n são inteiros não-negativos.

Vamos distinguir várias integrais dessa forma:

Caso 1:

$$\int \operatorname{tg}^n u\, du \text{ ou } \int \operatorname{cotg}^n u\, du \text{ onde } n \text{ é um inteiro positivo.}$$

Escrevemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^n u &= \operatorname{tg}^{n-2} u \operatorname{tg}^2 u \\ &= \operatorname{tg}^{n-2} u(\sec^2 u - 1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{cotg}^n u &= \operatorname{cotg}^{n-2} u \operatorname{cotg}^2 u \\ &= \operatorname{cotg}^{n-2} u(\operatorname{cosec}^2 u - 1) \end{aligned}$$

Exemplos:

a) Calcular $\int tg^3\ x\, dx$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x\, dx &= \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \operatorname{tg} x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tg} x\, dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

Exemplos:

b) Calcular $\int cotg^4\ 3x\ dx$.

Solução:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cotg}^4 3x\, dx &= \int \operatorname{cotg}^2 3x(\operatorname{cosec}^2 3x - 1)\, dx \\ &= \int \operatorname{cotg}^2 3x \operatorname{cosec}^2 3x\, dx - \int \operatorname{cotg}^2 3x\, dx \\ &= \frac{1}{9}(-\operatorname{cotg}^3 3x) - \int (\operatorname{cosec}^2 3x - 1)\, dx \\ &= -\frac{1}{9}\operatorname{cotg}^3 3x + \frac{1}{3}\operatorname{cotg} 3x + x + C \end{aligned}$$

Caso 2:

$$\int \sec^n u\, du \text{ ou } \int \operatorname{cosec}^n u\, du, \text{ onde } n \text{ é um inteiro par positivo.}$$

Escrevemos:

$$\sec^n u = \sec^{n-2} u \sec^2 u \qquad \operatorname{cosec}^n u = \operatorname{cosec}^{n-2} u \operatorname{cosec}^2 u$$
$$= (\operatorname{tg}^2 u + 1)^{(n-2)/2} \sec^2 u \qquad = (\operatorname{cotg}^2 u + 1)^{(n-2)/2} \operatorname{cosec}^2 u$$

Exemplo:

a) Calcular $\int \boldsymbol{cossec^6\ x\,dx}$.

Solução:

$$\int \operatorname{cosec}^6 x\,dx = \int (\operatorname{cotg}^2 x + 1)^2 \operatorname{cosec}^2 x\,dx$$
$$= \int \operatorname{cotg}^4 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx + 2\int \operatorname{cotg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x\,dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx$$
$$= -\tfrac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x - \tfrac{2}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x + C$$

Caso 3:

$\int \sec^n u\,du$ ou $\int \operatorname{cosec}^n u\,du$, onde n é um inteiro ímpar positivo.

Para integrar potências ímpares de secante e cossecante usaremos integração por partes.

Exemplo:

a) Calcular $\int \boldsymbol{sec^3\ x\ dx}$.

Solução:

Seja $u = \sec x$ e $dv = \sec^2 x\,dx$.

Então:

$$du = \sec x \operatorname{tg} x\,dx \quad \text{e} \quad v = \operatorname{tg} x$$

Logo,

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Somando $\int \sec^3 x\, dx$ a ambos os membros, obtemos

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + 2C$$

$$\int \sec^3 x\, dx = \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

Caso 4:

$\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde n é um inteiro par positivo.

Exemplo:

a) Calcular $\int tg^5\ x\, sec^4\ x\, dx.$

Solução:

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^4 x\, dx = \int \operatorname{tg}^5 x(\operatorname{tg}^2 x + 1) \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \operatorname{tg}^7 x \sec^2 x\, dx + \int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \tfrac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x + \tfrac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x + C$$

Caso 5:

$\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\, du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\, du$, onde m é um inteiro ímpar positivo.

Exemplo:

a) Calcular $\int tg^5\ x\, sec^7\ x\, dx$.

Solução:

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x\,dx = \int \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x\,dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x(\sec x \operatorname{tg} x\,dx)$$
$$= \int \sec^{10} x(\sec x \operatorname{tg} x\,dx) - 2\int \sec^8 x(\sec x \operatorname{tg} x\,dx) + \int \sec^6 x(\sec x \operatorname{tg} x\,dx)$$
$$= \tfrac{1}{11}\sec^{11} x - \tfrac{2}{9}\sec^9 x + \tfrac{1}{7}\sec^7 x + C$$

Caso 6:

$\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u\,du$ ou $\int \operatorname{cotg}^m u \operatorname{cosec}^n u\,du$, onde m é um inteiro par positivo e n é um inteiro ímpar positivo.

O integrando pode ser expresso em termos de potências ímpares de secante e cossecante.

Exemplo:

a) **Calcular** $\int tg^2\ x\, sec^3\ x\, dx$.

Solução:

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x\,dx$$
$$= \int \sec^5 x\,dx - \int \sec^3 x\,dx$$

Para calcular cada uma dessas integrais usamos integração por partes, conforme foi indicado no Caso 3.

2.4.3- Integração por Substituição Trigonométrica

Quando o integrando possuir expressões do tipo $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, sendo a > 0, geralmente é possível efetuar a integração através de uma substituição trigonométrica que levará a uma integral envolvendo funções trigonométricas.

Caso 1: O integrando possui uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, sendo a > 0.

Introduzindo uma nova variável θ e tomando u = a sen θ, em que

$$0 \leqslant \theta \leqslant \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então du = a cos θ d θ, e

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - u^2} &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \\ &= a\sqrt{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\cos\theta \geqslant 0$. Então $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$, e

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$$

Como $\operatorname{sen}\theta = u/a$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$,

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}$$

Exemplo:

a) **Calcule** $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

Solução:

Seja $x = 3\operatorname{sen}\theta$, onde $0 < \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ se $x > 0$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = 3\cos\theta\, d\theta$ e

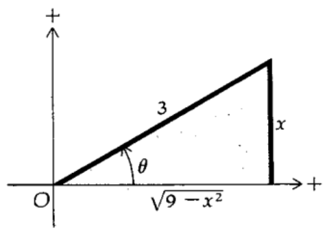
$$\begin{aligned} \sqrt{9 - x^2} &= \sqrt{9 - 9\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= 3\sqrt{\cos^2\theta} \\ &= 3\cos\theta \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\operatorname{sen}^2\theta}(3\cos\theta\, d\theta) \\ &= \int \operatorname{cotg}^2\theta\, d\theta \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\, d\theta \\ &= -\operatorname{cotg}\theta - \theta + C \end{aligned}$$

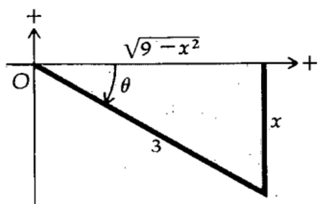
Como sen $\theta = \frac{1}{3}x$ e $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$, $\theta = \text{sen}^{-1}\frac{1}{3}x$. Para encontrar cotg θ, consulte as Figuras 1 (para $x > 0$) e 2 (para $x < 0$). Observe que em ambos os casos cotg $\theta = \sqrt{9 - x^2}/x$. Logo,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \text{sen}^{-1}\frac{x}{3} + C$$



$x > 0$

FIGURA 1



$x < 0$

FIGURA 2

Caso 2: O integrando possui uma expressão da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, sendo a > 0.

Introduzindo uma nova variável θ e fazendo u = a tg θ, em que

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant 0 \quad \text{e} \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \theta < 0 \quad \text{se } u < 0$$

Então,

$$du = a \sec^2\theta\, d\theta, \text{ e}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + u^2} &= \sqrt{a^2 + a^2\,\text{tg}^2\,\theta} \\ &= a\sqrt{1 + \text{tg}^2\,\theta} \\ &= a\sqrt{\sec^2\theta}\end{aligned}$$

Exemplo:

a) **Calcule** $\int \sqrt{x^2 + 5}$ **dx**

Solução:

Substituímos $x = \sqrt{5}\,\text{tg}\,\theta$, onde $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x \geqslant 0$ e $-\frac{1}{2}\pi < \theta < 0$ se $x < 0$. Então $dx = \sqrt{5}\sec^2\theta\, d\theta$ e

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+5} &= \sqrt{5\ \mathrm{tg}^2\,\theta + 5} \\
&= \sqrt{5}\sqrt{\sec^2\theta} \\
&= \sqrt{5}\sec\theta
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+5}\,dx &= \int \sqrt{5}\sec\theta(\sqrt{5}\sec^2\theta\,d\theta) \\
&= 5\int \sec^3\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

Usando os cálculos feitos anteriormente, temos:

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \tfrac{5}{2}\sec\theta\ \mathrm{tg}\,\theta + \tfrac{5}{2}\ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta| + C$$

Determinamos $\sec\theta$ das Figuras 3 (para $x \geqslant 0$) e 4 (para $x < 0$), onde $\mathrm{tg}\,\theta = x/\sqrt{5}$. Em ambos os casos vemos que $\sec\theta = \sqrt{x^2+5}/\sqrt{5}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+5}\,dx &= \frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right| + C \\
&= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \tfrac{5}{2}\ln|\sqrt{x^2+5}+x| - \tfrac{5}{2}\ln\sqrt{5} + C \\
&= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \tfrac{5}{2}\ln(\sqrt{x^2+5}+x) + C_1
\end{aligned}
$$

Observe que substituímos $-\frac{5}{2}\ln\sqrt{5} + C$ pela constante arbitrária C_1. Além disso, como $\sqrt{x^2+5} + x > 0$, retiramos as barras de valor absoluto.

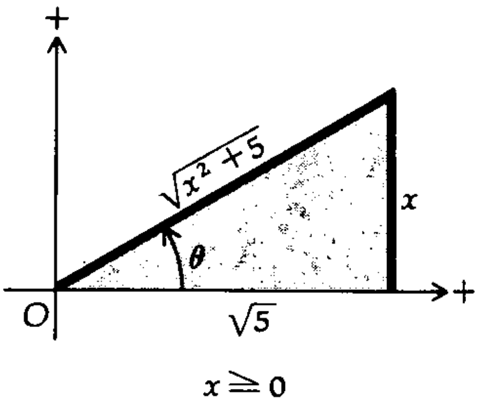


FIGURA 3

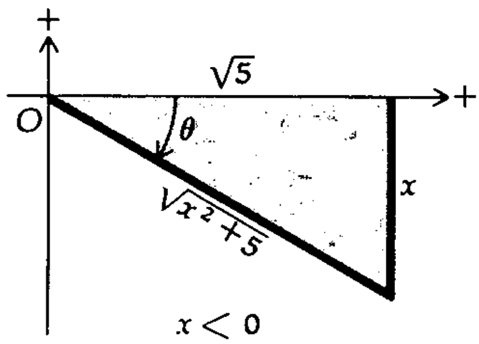


FIGURA 4

Caso 3: O integrando possui uma expressão da forma $\sqrt{u^2 - a^2}$, sendo a > 0.

Introduzindo uma nova variável θ e fazendo u = a sec θ, em que

$$0 \leqslant \theta < \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{se } u \geqslant a \quad \text{e} \quad \pi \leqslant \theta < \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{se } u \leqslant -a$$

Então $du = a \sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{u^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2}\\ &= \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)}\\ &= a\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta}\end{aligned}$$

Como $0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi$ ou $\pi \leqslant \theta < \frac{3}{2}\pi$, $\operatorname{tg}\theta \geqslant 0$. Assim, $\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta} = \operatorname{tg}\theta$, e temos

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \operatorname{tg}\theta$$

Como $\sec\theta = u/a$ e θ está em $[0, \frac{1}{2}\pi) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$,

$$\theta = \sec^{-1}\frac{u}{a}$$

Exemplos:

a) **Calcule** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$

Solução:

Seja $x = 3\sec\theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 3$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -3$. Então $dx = 3\sec\theta \operatorname{tg}\theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 9} &= \sqrt{9\sec^2\theta - 9}\\ &= 3\sqrt{\operatorname{tg}^2\theta}\\ &= 3\operatorname{tg}\theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta\ \mathrm{tg}\ \theta\ d\theta}{27\sec^3\theta \cdot 3\ \mathrm{tg}\ \theta}$$

$$= \tfrac{1}{27}\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{54}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

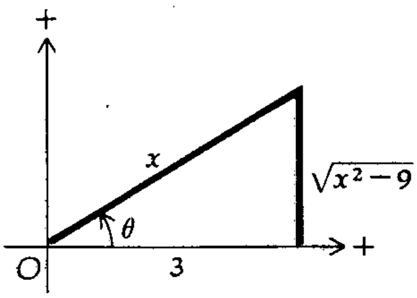
$$= \tfrac{1}{54}(\theta + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta) + C$$

$$= \tfrac{1}{54}(\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) + C$$

Como $\sec\theta = \frac{1}{3}x$ e θ está em $(0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $\theta = \sec^{-1}\frac{1}{3}x$. Quando $x > 3$, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e obtemos sen θ e cos θ da Figura 5. Quando $x < -3$, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, e obtemos sen θ e cos θ da Figura 6. Em ambos os casos sen $\theta = \sqrt{x^2-9}/x$ e $\cos\theta = 3/x$. Logo

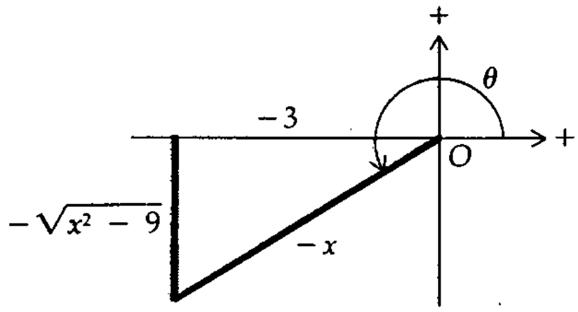
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\cdot\frac{3}{x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + C$$



$x > 3$

FIGURA 5



$x < -3$

FIGURA 6

b)Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

Solução:

Seja $x = 5 \sec \theta$, onde $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ se $x > 5$ e $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ se $x < -5$. Então $dx = 5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta$ e

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 25} &= \sqrt{25 \sec^2 \theta - 25} \\ &= 5\sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta} \\ &= 5 \operatorname{tg} \theta \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \int \frac{5 \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, d\theta}{5 \operatorname{tg} \theta} \\ &= \int \sec \theta \, d\theta \\ &= \ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C \end{aligned}$$

Para encontrar $\operatorname{tg} \theta$, consulte a Figura 7 (para $x > 5$) e a Figura 8 (para $x < -5$). Em ambos os casos, $\sec \theta = \frac{1}{5}x$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{5}\sqrt{x^2 - 25}$. Temos, então,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}} &= \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}\right| + C \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| - \ln 5 + C \\ &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 25}| + C_1 \end{aligned}$$

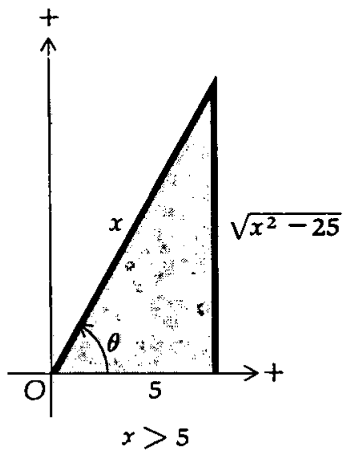


FIGURA 7

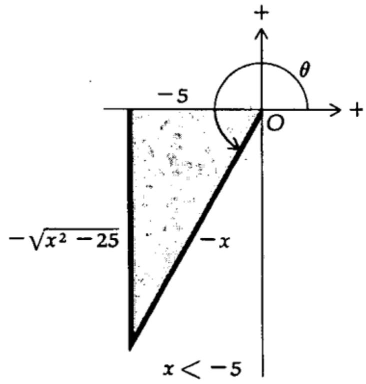


FIGURA 8

c)Calcule $\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Solução:

Para calcular a integral indefinida $\int dx/(6 - x^2)^{3/2}$ fazemos a substituição $x = \sqrt{6}$ sen θ. Nesse caso, podemos restringir θ ao intervalo $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, pois estamos calculando uma integral definida para a qual $x > 0$, uma vez que x está em [1, 2]. Assim, $x = \sqrt{6}$ sen θ, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, e $dx = \sqrt{6} \cos \theta\, d\theta$. Além disso,

$$\begin{aligned}(6 - x^2)^{3/2} &= (6 - 6 \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6}(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6}(\cos^2 \theta)^{3/2} \\ &= 6\sqrt{6} \cos^3 \theta\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sqrt{6} \cos \theta\, d\theta}{6\sqrt{6} \cos^3 \theta} \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{6} \int \sec^2 \theta\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{6} \operatorname{tg} \theta + C\end{aligned}$$

Encontramos tg θ da Figura 9, na qual sen $\theta = x/\sqrt{6}$ e $0 < \theta \frac{1}{2}\pi$. Assim, tg $\theta = x/\sqrt{6 - x^2}$, e portanto

$$\int \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{6\sqrt{6 - x^2}} + C$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{(6 - x^2)^{3/2}} &= \frac{x}{6\sqrt{6 - x^2}}\Bigg]_1^2 \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{5}}{30} \\ &= \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}{30}\end{aligned}$$

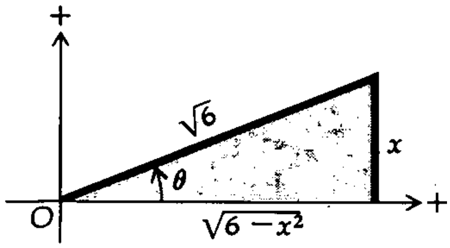


FIGURA 9

2.5- Técnicas de Integração – Método das Frações Parciais

Este método permite lidar com integrandos que são quocientes de polinômios. Quando o grau do numerador for maior que o grau do denominador, pode-se utilizar o algoritmo da divisão de Euclides para escrevê-lo como uma soma de um polinômio e um quociente cujo grau do numerador é menor que o grau do denominador. Assim, vamos nos dedicar a esses tipos de quocientes de polinômios: o grau do denominador é maior do que o grau do numerador. Nesses casos vamos empregar um resultado da Álgebra que nos permite reescrever o quociente como uma soma de quocientes mais simples, as chamadas frações parciais, sendo cada uma delas possível de ser integrada.

2.5.1- Decomposição em Frações Parciais

Dado um quociente de polinômios $\frac{p(x)}{q(x)}$, tal que o grau e p é menor do que o grau de q, que por conveniência podemos considerar mônico (o coeficiente do termo de maior grau é 1), ele se decompõe em uma soma de frações, correspondentes à decomposição de q(x) em fatores primos. Isto é, se

$$q(x) \;=\; (x-a_1)^{j_1}\ldots(x-a_m)^{j_m}\,(x^2+b_1x+c_1)^{k_1}\ldots(x^2+b_nx+c_n)^{k_n},$$

com $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$, tais que $b_i^2-4c_i<0$, e $j_1,\ldots,j_m$, $k_1,\ldots,k_n$ inteiros positivos, então existem constantes unicamente determinadas tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{j_i} \frac{A_{ir}}{(x-a_i)^r} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{k_i} \frac{B_{ir}x + C_{ir}}{(x^2+b_ix+c_i)^r}.$$

Veja algumas decomposições de frações parciais:

$$\frac{4x^2-9x-1}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3};$$

$$\frac{6x^4+2x^3-2x^2-5x-22}{(x+1)^2(x-2)(x^2+4)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{3x+1}{x^2+4};$$

$$\frac{x^5-x^4+3x^3-4x^2+x-2}{(x^2+1)^2x^2} = \frac{x-1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

Para usar o método das frações parciais para integrar $\int \frac{p(x)}{q(x)} \boldsymbol{dx}$, precisamos:

a) Decompor o polinômio q(x) em seus fatores primos.

b) Determinar as constantes da decomposição em frações parciais.

c) Saber integrar cada uma das frações parciais.

Observação:

As fórmulas

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

Resolvem os seguintes caos típicos:

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + C;$$

$$\int \frac{3}{5+2x+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C;$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{\ln(x^2+2x+2)}{2} + C.$$

Exemplos:

a) Calcular a integral $\int \frac{x-5}{x^2-x-2}\, dx$.

Solução:

Sabemos que $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Assim, o integrando pode ser escrito como uma soma de frações parciais. Isto é, existem constantes A e B, tais que:

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Podemos fazer,

$$\begin{aligned}\int \frac{x-5}{x^2-x-2}\,dx &= \int \frac{A}{x+1}\,dx + \int \frac{B}{x-2}\,dx \\ &= A\,\ln|x+1| + B\,\ln|x-2| + C.\end{aligned}$$

Há uma forma simples de calcular essas constantes. O integrando $f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$ está definido em $R - \{-1, 2\}$. Podemos fazer os cálculos dos limites a seguir:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}(x+1)f(x) &= \lim_{x\to -1}\left(\frac{(x+1)\,A}{x+1} + \frac{(x+1)\,B}{x-2}\right) \\ &= \lim_{x\to -1}\left(A + \frac{(x+1)\,B}{x-2}\right) = A.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x-2)f(x) &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)\,A}{x+1} + \frac{(x-2)\,B}{x-2}\right) \\ &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)\,A}{x+1} + B\right) = B.\end{aligned}$$

Ou seja:

$$A = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-5)}{x^2 - x - 2} \;=\; \lim_{x \to -1} \frac{x-5}{x-2} \;=\; \frac{-6}{-3} \;=\; 2$$

e

$$B = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-5)}{x^2 - x - 2} \;=\; \lim_{x \to 2} \frac{x-5}{x+1} \;=\; \frac{-3}{3} \;=\; -1.$$

Agora podemos escrever a solução completa da integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-5}{x^2 - x - 2}\, dx \;&=\; \int \frac{2}{x+1}\, dx \;-\; \int \frac{1}{x-2}\, dx \\ &=\; 2 \ln|x+1| \;-\; \ln|x-2| \;+\; C. \end{aligned}$$

b) Calcular $\int \frac{x^2-5x-10}{x^3-x^2-5x-3}\, dx$.

Solução:

Inicia-se a decomposição do denominador, cujas possíveis raízes inteiras são ± 1 e ± 3. Na verdade, a decomposição é

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 \;=\; (x+1)^2(x-3).$$

Levando em conta a multiplicidade da raiz (– 1), as frações parciais ficam

$$\frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3} \;=\; \frac{A_1}{(x+1)^2} \;+\; \frac{A_2}{x+1} \;+\; \frac{B}{x-3}.$$

Calculando as constantes A_1 e B.

Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$, o integrando. Então,

$$A_1 = \lim_{x \to -1} (x+1)^2 f(x) = \lim_{x \to -1} \left(A_1 + A_2(x+1) + \frac{B(x+1)^2}{x-3} \right)$$

$$A_1 = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 10}{x - 3} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

e

$$B = \lim_{x \to 3} (x-3) f(x) = \lim_{x \to 3} \left(\frac{A_1(x-3)}{(x+1)^2} + \frac{A_2(x-3)}{x+1} + B \right)$$

$$B = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x - 10}{(x+1)^2} = \frac{-16}{16} = -1.$$

Para calcular A2, a constante restante, basta avaliar a função

$$\frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} - \frac{1}{x-3}.$$

Em algum valor conveniente de x. Pode-se fazer, por exemplo, x = 0.

$$\frac{-10}{-3} = 1 + A_2 - \frac{1}{-3},$$

que acarreta A2 = 2, podendo agora calcular a integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 5x - 10}{x^3 - x^2 - 5x - 3}\, dx &= \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx + \int \frac{2}{x+1}\, dx - \int \frac{1}{x-3}\, dx \\ &= -\frac{1}{x+1} + 2 \ln|x+1| - \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

c) Integrar

$$I = \int \frac{2x^3 + x^2 - 5x - 8}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2}\, dx.$$

Solução:

As possíveis raízes inteiras do polinômio $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2$ são ± 1 e ± 2. Sua decomposição é

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 \;=\; (x+1)(x-1)(x^2+2x+2).$$

Portanto, a decomposição em frações parciais do integrando leva em conta o termo indecomponível de grau dois.

$$f(x) \;=\; \frac{2x^3 + x^2 - 5x - 8}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2} \;=\; \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} \;+\; \frac{D}{x+1} \;+\; \frac{E}{x-1}.$$

O expediente dos limites nos ajudará a calcular as constantes D e E.

$$D \;=\; \lim_{x\to -1}(x+1)f(x) \;=\; \lim_{x\to -1}\frac{2x^3+x^2-5x-8}{(x-1)(x^2+2x+2)} \;=\; \frac{-4}{-2} = \; 2$$

e

$$E \;=\; \lim_{x\to 1}(x-1)f(x) \;=\; \lim_{x\to 1}\frac{2x^3+x^2-5x-8}{(x+1)(x^2+2x+2)} \;=\; \frac{-10}{10} \;=\; -1$$

Portanto,

$$\frac{2x^3 + x^2 - 5x - 8}{x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2} \;=\; \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} \;+\; \frac{2}{x+1} \;-\; \frac{1}{x-1}$$

Fazendo x = 0, obtém-se B = 2. Para calcular A, pode-se escolher outro valor para x, diferente de 1, – 1 e 0. Fazendo x = 2, obtém-se A= 1. Com essas informações e escrevendo $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, pode-se efetuar a integração:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+2}{(x+1)^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx \\
I &= \int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx \\
I &= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}dx + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx + \int \frac{2}{x+1}dx - \int \frac{1}{x-1}dx \\
I &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+1) + \arctan(x+1) + 2\,\ln|x+1| - \ln|x-1| + \; C.
\end{aligned}$$

Como podemos observar, o termo indecomponível de grau dois dividiu-se em duas integrais, uma envolvendo logaritmo e outra arcotangente, Nos casos em que a multiplicidade do termo indecomponível de grau dois for maior do que um, podemos fazer o seguinte:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^r}\,dx \;=\; \frac{A}{2}\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^r}\,dx \;+\; B\int \frac{1}{(x^2+a^2)^r}\,dx.$$

A primeira parcela pode ser resolvida pelo método da substituição:

$$\int \frac{2x}{(x^2+a^2)^r}\,dx \;=\; \frac{1}{1-r}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{r-1}} \;+\; C.$$

A segunda parcela pode ser calculada pela fórmula de redução a seguir:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{r+1}}\,dx \;=\; \frac{x}{2ra^2(x^2+a^2)^r} \;+\; \frac{2r-1}{2ra^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^r}\,dx.$$

d) Calcular $\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx$.

Solução:

Podemos começar com a integração por partes aplicada na integral $\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$, fazendo $u = \frac{1}{x^2+4}$ e du = dx. Isso nos dá $du = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}\,dx$ e v = x. Aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+4}\,dx &= \frac{x}{x^2+4} - \int \frac{-2x^2}{(x^2+4)^2}\,dx \\
&= \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx \\
&= \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{x^2+4-4}{(x^2+4)^2}\,dx \\
&= \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{x^2+4}{(x^2+4)^2}\,dx + 2\int \frac{-4}{(x^2+4)^2}\,dx \\
&= \frac{x}{x^2+4} + 2\int \frac{1}{x^2+4}\,dx - 8\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx
\end{aligned}$$

Manipulando essa igualdade, obtemos

$$8\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+4} + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$
$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + C.$$

2.6- Técnicas de Integração: Funções Trigonométricas Hiperbólicas

Certas combinações de e^x e e^{-x} aparecem tão frequentemente nas aplicações de Matemática que receberam denominações especiais. Duas delas são as funções seno e cosseno hiperbólicos.

Definição 1:

A **função seno hiperbólico** é definida por

$$\text{senh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

O domínio e a imagem são o conjunto de todos os números reais.

Definição 2:

A **função co-seno hiperbólico** é definida por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

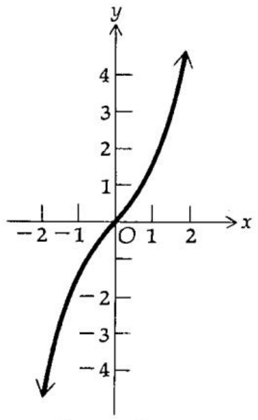
O domínio é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o conjunto de todos os números no intervalo $[1, +\infty)$.

Como

$$\text{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\text{senh}\, x$$

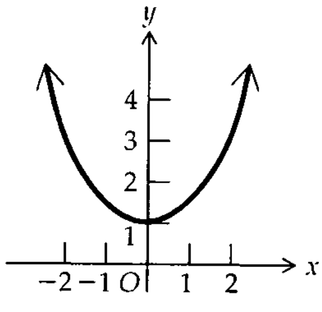
$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$$

o seno hiperbólico é uma função ímpar e o cosseno hiperbólico é uma função par.



$y = \text{senh}\ x$

FIGURA 1



$y = \cosh x$

FIGURA 2

As fórmulas das derivadas das funções seno e cosseno hiperbólicos são obtidas aplicando as definições 1 e 2 e derivando as expressões envolvendo funções exponenciais. Assim

$$D_x(\text{senh}\,x) = D_x\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \qquad D_x(\cosh x) = D_x\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad\qquad = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \cosh x \qquad\qquad = \text{senh}\ x$$

Dessas fórmulas e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.

Teorema 1

Se u for uma função derivável de x, $D_x\,(\text{senh}\ u) = \cosh u\ D_x u$ $D_x\,(\cosh u) = \text{senh}\ u\ D_x u$

Como D_x (senh x) > 0 para todo x, a função seno hiperbólico é crescente em todo o seu domínio. Com essa informação, com o conhecimento de que ela é uma função ímpar e com alguns valores obtidos da tabela de funções hiperbólicas no apêndice, traçamos o gráfico da função seno hiperbólico da Figura 1.

A função co-seno hiperbólico é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ pois D_x (cosh x) < 0 se $x < 0$ e é crescente no intervalo $[0, +\infty)$ pois D_x (cosh x) > 0 se $x > 0$. Além disso, o co-seno hiperbólico é uma função par. Com estas informações e com alguns valores do cosh x encontrados com uma calculadora, traçamos o gráfico da função co-seno hiperbólico da Figura 2.

As quatro funções hiperbólicas remanescentes são definidas em termos das funções seno e cosseno hiperbólicos. Elas satisfazem identidades semelhantes àquelas satisfeitas pelas funções trigonométricas.

Definição 3:

As **funções tangente, co-tangente, secante e co-secante hiperbólicas** são definidas da seguinte forma:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \tag{1}$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} \tag{2}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \tag{3}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} \tag{4}$$

A funções hiperbólicas da definição 3 podem ser expressas em termos das funções exponenciais, usando as definições 1 e 2. Temos

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

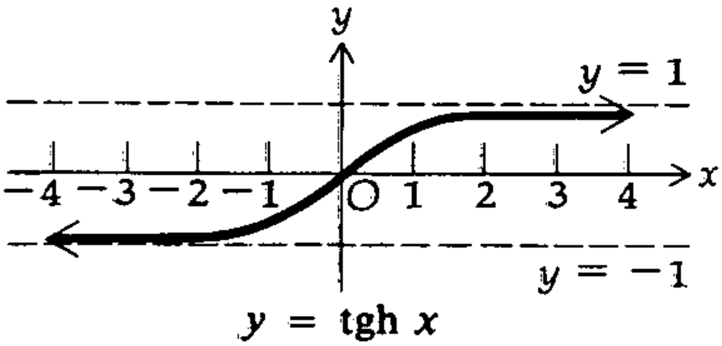


FIGURA 3

Um esboço do gráfico da função tangente hiperbólica está na figura 3. Observe que das figuras 1, 2 e 3 podemos concluir que essas funções , ao contrário das funções trigonométricas correspondentes, não são periódicas. Existem identidades satisfeitas pelas funções hiperbólicas que são similares àquelas satisfeitas pelas funções trigonométricas. Quatro delas foram apresentadas na definição 3. As outras quatro identidades são as seguintes:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{tgh}\, x &= \frac{1}{\text{cotgh}\, x} \\ \cosh^2 x - \text{senh}^2 x &= 1 \\ 1 - \text{tgh}^2 x &= \text{sech}^2 x \\ 1 - \text{cotgh}^2 x &= -\text{cosech}^2 x \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(5) \\ &(6) \\ &(7) \\ &(8) \end{aligned}$$

A identidades (5) segue imediatamente de (1) e (2). A seguir temos a demonstração de (6).

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \text{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

A identidade (7) pode ser demonstrada usando as fórmulas de tgh x e sech x em termos de e^x e e^{-x} como na demonstração acima, ou então uma prova alternativa pode ser feita usando outras identidades, como:

$$1 - \text{tgh}^2 x = 1 - \frac{\text{senh}^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \text{senh}^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$= \text{sech}^2 x$$

Às vezes é muito útil o emprego das relações que decorrem das definições 1 e 2.

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh x + \text{senh}\, x &= e^x \\ \cosh x - \text{senh}\, x &= e^{-x} \end{aligned}}$$ (9) (10)

Elas são usadas na demonstração da seguinte identidade:

$$\boxed{\text{senh}\,(x + y) = \text{senh}\, x \cosh y + \cosh x\, \text{senh}\, y} \qquad (11)$$

Da definição 1:

$$\text{senh}\,(x + y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2}$$

Aplicando (9) e (10) ao segundo membro da igualdade anterior, obtemos:

$$\text{senh}\,(x + y) = \tfrac{1}{2}[(\cosh x + \text{senh}\, x)(\cosh y + \text{senh}\, y) - (\cosh x - \text{senh}\, x)(\cosh y - \text{senh}\, y)]$$

Efetuando os cálculos do segundo membro da igualdade acima e combinando os termos obteremos a identidade (11). Da mesma forma podemos provar a

$$\boxed{\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y} \qquad \textbf{(12)}$$

Se em (11) e (12) y for substituído por x, iremos obter as fórmulas

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \textbf{(13)}$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x \qquad \textbf{(14)}$$

A fórmula (14), combinada com a identidade (6), nos fornece duas fórmulas alternativas para cosh 2x, que são

$$\cosh 2x = 2 \operatorname{senh}^2 x + 1 \qquad \textbf{(15)}$$

$$\cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1 \qquad \textbf{(16)}$$

Resolvendo (15) e (16) em senh x e cosh x, respectivamente, e substituindo x por ½ x , iremos obter

$$\operatorname{senh}\frac{x}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}} & \text{se } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}} & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad (17)$$

$$\cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}} \qquad (18)$$

Não temos um símbolo ± no segundo membro de (18) pois a imagem da função cosseno hiperbólico é [1, +∞). Para encontrar a derivada da função tangente hiperbólica usamos algumas identidades.

$$D_x(\text{tgh } x) = D_x\left(\frac{\text{senh } x}{\cosh x}\right)$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \text{senh}^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$= \text{sech}^2 x$$

As fórmulas de derivação das funções hiperbólicas remanescentes são as seguintes: D_x (cotgh x) = - cossech²; D_x (sech x) = - sech.tgh x; D_x (cossech x) = - cossech x . cotgh x. Dessas fórmulas e da regra da cadeia temos o teorema a seguir.

Teorema 2

Se u for uma função de x derivável,

$$D_x(\text{tgh } u) = \text{sech}^2\, u D_x u$$

$$D_x(\text{cotgh } u) = -\text{cosech}^2\, u D_x u$$

$$D_x(\text{sech } u) = -\text{sech } u \text{ tgh } u D_x u$$

$$D_x(\text{cosech } u) = -\text{cosech } u \text{ cotgh } u D_x u$$

Podemos observar que todas as fórmulas das derivadas das funções hiperbólicas seno, cosseno e tangente possuem sinal mais, enquanto que as derivadas da cotangente, secante e cossecante hiperbólicas todas têm sinal menos. Essa é a única diferença entre as fórmulas das funções hiperbólicas e trigonométricas.

Exemplos:

a) Ache dy/dx sendo y = tgh (1 – x^2

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2 (1 - x^2) \cdot D_x(1 - x^2)$$
$$= -2x \operatorname{sech}^2 (1 - x^2)$$

b) Ache f' (x) sendo f(x) = ln senh x.

Solução:

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh} x} \cdot \cosh x$$
$$= \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$
$$= \operatorname{cotgh} x$$

As fórmulas de integração indefinida do próximo teorema decorrem das fórmulas de derivação dos Teoremas 1 e 2.

Teorema 3:

$$\int \operatorname{senh} u \, du = \cosh u + C$$
$$\int \cosh u \, du = \operatorname{senh} u + C$$
$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \operatorname{tgh} u + C$$
$$\int \operatorname{cosech}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + C$$
$$\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u \, du = -\operatorname{sech} u + C$$
$$\int \operatorname{cosech} u \operatorname{cotgh} u \, du = \operatorname{cosech} u + C$$

Os métodos utilizados para integrar as funções hiperbólicas são similares àqueles usados para funções trigonométricas.

Exemplos:

a) Calcule $\int \boldsymbol{senh\, x\, cosh^2\ x\, dx}$.

Solução:

$$\int \operatorname{senh} x \cosh^2 x \, dx = \int \cosh^2 x \, (\operatorname{senh} x \, dx)$$
$$= \tfrac{1}{3}\cosh^3 x + C$$

b) Calcule $\int \boldsymbol{tgh^2\ x\, dx}$.

Solução:

$$\int \operatorname{tgh}^2 x \, dx = \int (1 - \operatorname{sech}^2 x) \, dx$$
$$= \int dx - \int \operatorname{sech}^2 x \, dx$$
$$= x - \operatorname{tgh} x + C$$

Exemplos:

1- Calcule $\int \boldsymbol{x\, (\ln\, x\,)^2\ dx}$.

Uma substituição simples, como u = lnx não parece muito apropriada, uma vez que temos x multiplicando $(\ln x)^2$. Isso seria interessante se o fator multiplicando $(\ln x)^2$ fosse $\frac{1}{x}$. Podemos abordar o problema utilizando a integração por partes. Fazendo dv = dx, teremos, u= x. $(\ln x)^2$. Assim,

$$du = \left[(\ln x)^2 + 2x\,(\ln x)\,\frac{1}{x}\right] dx =$$
$$= \left[(\ln x)^2 + 2\ln x\right] dx.$$

Então,

$$\int x(\ln x)^2\,dx = x^2(\ln x)^2 - \int x\left[(\ln x)^2 + 2\ln x\right]dx =$$
$$= x^2(\ln x)^2 - \int x(\ln x)^2\,dx + \int 2x\ln x\,dx.$$

Reunindo os termos iguais temos:

$$2\int x(\ln x)^2\,dx = x^2(\ln x)^2 - \int 2x\ln x\,dx.$$

Agora, basta resolver a integral $\int \boldsymbol{2xlnx\,dx}$.

Usando a integração por partes, faremos u = ln x e dv = ex dx. Portanto, $\boldsymbol{du = \frac{1}{x}\,dx}$. Isso nos dá:

$$\int 2x\ln x\,dx = x^2\ln x - \int x\,dx =$$
$$= x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Finalmente, podemos concluir nosso cálculo original.

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2(\ln x)^2 - \int 2x\ln x\,dx\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[x^2(\ln x)^2 - x^2\ln x + \frac{x^2}{2} - C_1\right] =$$
$$= \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{x^2}{4} + C.$$

2- Calcule $\int \boldsymbol{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}\,dx}$

Esta integral apresenta como dificuldade o fato de a variável x aparecer com diferentes expoentes fracionários. Nesse caso, a melhor estratégia é utilizar uma substituição simples para eliminar os expoentes fracionários. Considerando $\boldsymbol{u = x^{\frac{1}{6}}}$, teremos $\boldsymbol{x^{\frac{1}{3}} = u^2}$ e $\boldsymbol{x^{\frac{1}{2}} = u^3}$. Como $\boldsymbol{u = x^{\frac{1}{6}}}$, podemos fazer

$$du = \frac{1}{6}x^{-5/6}\,dx = \frac{1}{6\,(x^{1/6})^5}\,dx \implies dx = 6\,u^5\,du.$$

$$\int \frac{1}{x^{1/3} + x^{1/2}}\,dx = \int \frac{6\,u^5}{u^2 + u^3}\,du = \int \frac{6\,u^3}{1+u}\,du.$$

Efetuando a divisão de polinômios

$$\begin{array}{ll|l}
u^3 & & u+1 \\ \cline{3-3}
-u^3 - u^2 & & u^2 - u + 1 \\
\quad -u^2 & & \\
\quad +u^2 + u & & \\
\qquad\quad +u & & \\
\qquad\quad -u - 1 & & \\
\text{resto:} \quad -1 & &
\end{array}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{6\,u^3}{1+u}\,du &= 6\left[\int (u^2 - u + 1)\,du - \int \frac{1}{1+u}\,du\right] = \\
&= 6\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|1+u|\right) + C.
\end{aligned}$$

Substituindo $\boldsymbol{x^{\frac{1}{6}}}$ no lugar de u, temos

$$\int \frac{1}{x^{1/3} + x^{1/2}}\,dx = 2\,x^{1/2} - 3\,x^{1/3} + 6\,x^{1/6} - 6\,\ln(1 + x^{1/6}) + C.$$

3- Calcule $\int \frac{\boldsymbol{x^2}}{\sqrt{\boldsymbol{4-x^2}}}\,\boldsymbol{dx}$.

Este problema será resolvido por substituição trigonométrica. No entanto, antes da aplicação dessa técnica, deve-se fazer um ajuste algébrico.

$$\begin{aligned}
4x - x^2 &= -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4) = \\
&= 4 - (x^2 - 4x + 4) = 4 - (x-2)^2.
\end{aligned}$$

Esse artifício de cálculo é também conhecido como a reconstrução do quadrado. Isso nos dá

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - (x-2)^2}}.$$

Fazendo a substituição trigonométrica, obtemos:

$$(x-2) = 2\ \text{sen}\ \theta \implies \sqrt{4 - (x-2)^2} = 2\ \cos\theta$$

e, logo, $\boldsymbol{dx = 2\cos\theta d\theta}$. Mas, $\boldsymbol{x = 2 + 2\ sen\ \theta}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx &= \int \frac{(2 + 2\ \text{sen}\ \theta)^2\, 2\ \cos\ \theta}{2\ \cos\ \theta}\,d\theta = \\
&= 4\int (1 + 2\ \text{sen}\ \theta\ +\ \text{sen}^2\,\theta)\,d\theta = \\
&= 4\left[\theta - 2\ \cos\ \theta\ +\ \frac{1}{2}\theta\ -\ \frac{1}{2}\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta\right]\ +\ C = \\
&= 4\left[\theta - 2\ \cos\ \theta\ +\ \frac{1}{2}\theta\ -\ \frac{1}{2}\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta\right]\ +\ C = \\
&= 4\left[\frac{3\theta}{2} - 2\ \cos\ \theta\ -\ \frac{1}{2}\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta\right]\ +\ C = \\
&= 6\,\theta - 8\ \cos\ \theta\ +\ 2\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta\ +\ C = \\
&= 6\,\theta - 6\ \cos\ \theta - 2\ \cos\ \theta - 2\ \text{sen}\ \theta\ \cos\ \theta\ +\ C = \\
&= 6\,\theta - 6\ \cos\ \theta - 2\ \cos\ \theta\ (1 + \text{sen}\ \theta)\ +\ C =
\end{aligned}$$

A resposta deve ser apresentada em termos da variável x e, se $\boldsymbol{2\cos\theta = \sqrt{4x - x^2}}$, $\boldsymbol{x = 2(\,1 + sen\ \theta)}$. Além disso, como $\boldsymbol{sen\theta = \frac{x}{2} - 1}$, temos $\boldsymbol{\theta = arcsen\ \left(\frac{x}{2} - 1\right)}$. Assim, podemos completar a resolução:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4x - x^2}}\,dx =$$

$$= 6\ \text{arcsen}\left(\frac{x}{2} - 1\right)\ -\ 3\sqrt{4x - x^2}\ -\ \frac{x}{2}\sqrt{4x - x^2}\ + C.$$

4- Calcule $\boldsymbol{\int x\sqrt{x^2 - 2x}\ dx}$.

Ajuste algébrico:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2 - 2x}\,dx &= \int (x - 1 + 1)\sqrt{x^2 - 2x}\,dx = \\
&= \int \left((x - 1)\sqrt{x^2 - 2x}\ + \sqrt{x^2 - 2x}\right)dx = \\
&= \int (x - 1)\sqrt{x^2 - 2x}\,dx\ +\ \int \sqrt{x^2 - 2x}\,dx.
\end{aligned}$$

A primeira parcela pode ser resolvida utilizando a substituição simples.

$$\begin{aligned}
\int (x - 1)\sqrt{x^2 - 2x}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2 - 2x}\,(2x - 2)\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3}\ +\ C = \\
&= \frac{(x^2 - 2x)^{3/2}}{3}\ +\ C_1.
\end{aligned}$$

A segunda parcela pode ser resolvida utilizando a substituição trigonométrica.

Ajuste algébrico:

Como

$$x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1,$$

faremos a seguinte substituição:

$$x - 1 = \sec\theta.$$

Isso acarreta $\boldsymbol{dx = \sec\theta\, tg\theta d\theta}$ e $\boldsymbol{\sqrt{x^2 - 2} = tg\theta}$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 - 2x}\,dx &= \int \operatorname{tg}\theta\ \sec\theta\ \operatorname{tg}\theta\,d\theta = \sec\theta\ \operatorname{tg}^2\theta\,d\theta = \\ &= \int \sec\theta\,(\sec^2\theta - 1)\,d\theta = \\ &= \int \sec^3\theta\,d\theta - \int \sec\theta\,d\theta.\end{aligned}$$

Devemos lembrar que as integrais de potências ímpares de secante são um tanto trabalhosas. Aqui estão:

- $\displaystyle\int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C.$
- $\displaystyle\int \sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\ \operatorname{tg}\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C.$

Logo,

$$\int \sec^3\theta\,d\theta - \int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\ \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C_2.$$

Escrevendo a resposta em termos da variável original x, temos:

$$\int \sqrt{x^2 - 2x}\,dx = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2 - 2x} - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1| + C_2.$$

Essa é a resposta da segunda parcela. Segue cálculo final.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 - 2x}\,dx = \frac{(x^2 - 2x)^{3/2}}{3} + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2 - 2x} \\ - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1| + C.\end{aligned}$$

5- Calcule $\boldsymbol{\int \frac{14x^2+7x+2}{(2x^2+2x+5)(3x-1)}\,dx}$.

A expansão em frações aprciais tem a seguinte forma:

$$\frac{14x^2 + 7x + 2}{(2x^2 + 2x + 5)(3x - 1)} = \frac{Ax + B}{2x^2 + 2x + 5} + \frac{C}{3x - 1}.$$

Multiplicando a igualdade por $(2x^2 + 2x + 5)(3x - 1)$, temos:

$$\begin{aligned} 14x^2+7x+2 &= (Ax+B)(3x-1) + C(2x^2+2x+5) = \\ &= 3Ax^2 - Ax + 3Bx - B + 2Cx^2 + 2Cx + 5C = \\ &= (3A+2C)x^2 + (-A+3B+2C)x - B + 5C. \end{aligned}$$

Isso nos dá o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3A + 2C &= 14 \\ -A + 3B + 2C &= 7 \\ -2B + 5C &= 2. \end{cases}$$

A solução desse sistema é: A = 4, B=3 e C= 1. Portanto,

$$\int \frac{14x^2+7x+2}{(2x^2+2x+5)(3x-1)}\,dx = \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{1}{3x-1}\,dx.$$

A primeira parcela se decompõe como a soma de duas integrais: um logaritmo e um arcotangente.

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+5}\,dx &= \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}\,dx + \int \frac{1}{2x^2+2x+5}\,dx = \\ &= \ln(2x^2+2x+5) + \frac{1}{3}\,\text{arctg}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) + C_1. \end{aligned}$$

Observe que

$$\mathbf{2x^2 + 2x + 5 = 2\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right) = 2(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{14x^2+7x+2}{(2x^2+2x+5)(3x-1)}\,dx &= \ln(2x^2+2x+5) + \frac{1}{3}\,\text{arctg}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \\ &= +\frac{1}{3}\ln|3x-1| + C. \end{aligned}$$

Unidade 3- Integrais Impróprias

3.1- Introdução

A existência da integral definida $\int_a^b f(x)dx$, em que f é contínua no intervalo fechado [a, b], é garantida pelo teorema fundamental do cálculo. No entanto, determinadas aplicações do Cálculo nos levam a formulações de integrais em que

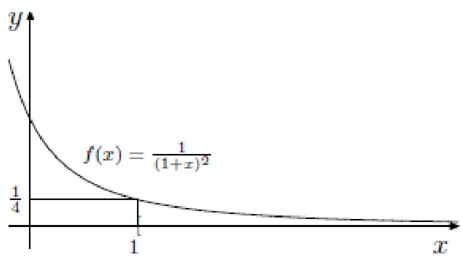
1. ou o intervalo de integração não é limitado.
2. ou o integrando tem uma descontinuidade infinita em algum ponto do intervalo [a, b].

Exemplos:

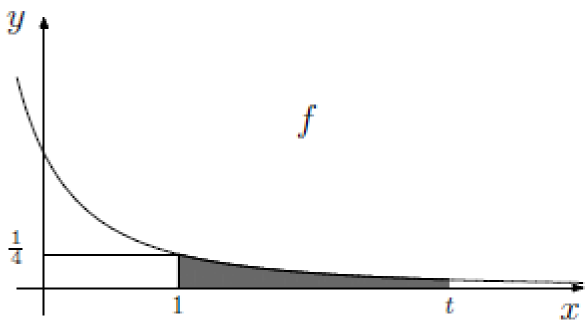
a)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

Trata – se de um exemplo de integral imprópria. Essa integral não está definida num intervalo fechado e limitado, o que fica evidenciado pelo uso do símbolo ∞ como seu segundo limite de integração. Ou seja, deseja – se integrar a função $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^2}$ sobre toda semirreta [1,∞). Segue o gráfico de f sobre o intervalo de integração.



Estamos lidando com uma situação não limitada que ocorre na direção do eixo Ox. Para dar sentido ao símbolo $\int_{\mathbf{1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^2}\,\boldsymbol{dx}$ podemos considerar situações limitadas que estão cada vez mais próximas das situação desejada, ou seja, calcularemos $\int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{t}} \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^2}\,\boldsymbol{dx}$, em que t > 1, com área bem definida.



Em seguida, vamos estudar o comportamento dessa integral definida para valores muito grandes de t, usando o conceito de limite.

Inicialmente fazendo o cálculo da área.

$$\int_1^t \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \;=\; -\frac{1}{1+x}\bigg|_1^t \;=\; -\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}$$

Quando t cresce ,indefinidamente, $-\frac{1}{1+t}$ aproxima – se de 0 (zero).

Formalmente,

$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2}$$

.

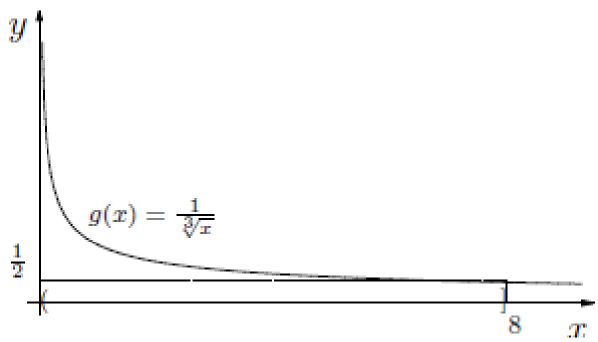
Podemos, então, dizer que

$$\int_1^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}$$

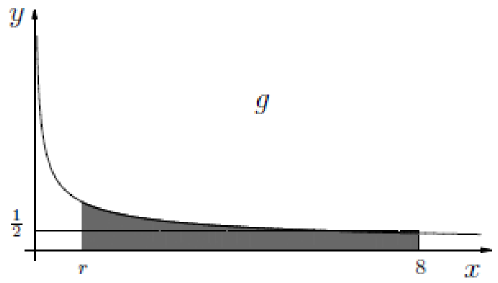
b)

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Temos, também, um exemplo de integral imprópria. Apesar de o intervalo de integração ser limitado, a função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[3]{\boldsymbol{x}}}$ não está definida no extremo esquerdo do intervalo. Segue o gráfico de g sobre o intervalo de integração.



Como no exemplo anterior, estamos lidando com uma situação não-limitada. Nesse caso, a não-limitação ocorre na direção do eixo Oy. Para dar sentido à $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, consideraremos situação limitada que está próxima da situação desejada. Calcularemos $\int_r^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$, em que 0 < r < 8 , com área bem definida. Veja figura a seguir.



Agora, estudaremos o comportamento dessa integral definida para valores positivos de r cada vez mais próximos de zero usando o conceito de limite. Inicialmente fazendo o cálculo da área.

$$\int_r^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_r^8 = 6 - \frac{3}{2}r^{2/3}.$$

Quando r se aproxima de zero, pela direita, $-\frac{3r^{2/3}}{2}$ também fica próximo de zero. Formalmente,

$$\lim_{r\to 0^+} 6 - \frac{3}{2}r^{2/3} = 6.$$

Podemos, então, dizer que

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = 6.$$

3.2- Integrais Impróprias: Formalizando os conceitos

As integrais impróprias são o resultado da aplicação da teoria dos limites à teoria de integrais. Os exercícios que envolvem integrais impróprias requerem habilidades na integração e no cálculo de limites.

Seja $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere $F : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx.$$

Assim, para cada valor $t \geq a$, $F(t)$ é a integral de $f(x)$ sobre o intervalo $[a, t]$.

Se $\lim_{t\to+\infty} F(t) = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx \in \mathbb{R}$, diremos que a integral imprópria $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge e colocamos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} F(t) \;=\; \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Analogamente, seja $g : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere $G : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$G(t) = \int_t^b g(x)\, dx.$$

Logo, para cada valor $a < t \leq b$, $G(t)$ é a integral de $g(x)$ sobre o intervalo $[t, b]$.

Se $\lim_{t\to a^+} G(t) = \lim_{t\to a^+} \int_t^b g(x)\, dx \in \mathbb{R}$, diremos que a integral imprópria $\int_a^b g(x)\, dx$ converge e colocamos

$$\int_a^b g(x)\, dx \;=\; \lim_{t\to a^+} G(t) \;=\; \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\, dx.$$

Exemplo:

Calcular a convergência da integral imprópria $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x\, dx.$

Vamos, primeiro, calcular a integral indefinida $\int e^{-x} \cos x\, dx$. Para isso, usamos a técnica de integração por partes, e obtemos

$$\int e^{-x} \cos x\, dx \;=\; \frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen} x \,-\, \cos x) \,+\, C.$$

Agora podemos fazer:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-x} \cos x\, dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{e^{-x}}{2}(\operatorname{sen} x \,-\, \cos x)\right]\Bigg|_0^t \;=$$

$$=\; \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{e^{-t}}{2}(\operatorname{sen} t \,-\, \cos t) \,+\, \frac{1}{2}\right] \;=\; \frac{1}{2}.$$

Como o limite é finito, dizemos que a integral imprópria converge e colocamos

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x\, dx \;=\; \frac{1}{2}.$$

Obs.: Uma condição necessária para a convergência

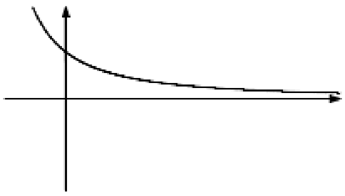
Seja f uma função contínua, tal que $[a, \infty) \subset \text{Dom}(f)$. Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergir, então

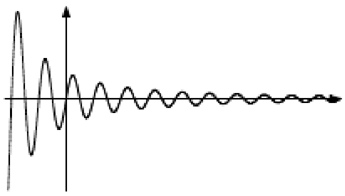
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Exatamente! Para a integral imprópria $\int_a^\infty f(x)\,dx$ convergir é necessário que a parte positiva do eixo Ox seja uma assíntota horizontal da função f. Veja alguns exemplos de funções que satisfazem esta condição:

$$f(x) = \frac{1}{x}; \qquad g(x) = \frac{1}{1+x^2}; \qquad h(x) = \frac{1}{1 + x\,\ln x}.$$

Veja, também, dois gráficos de funções com essa característica.





Exemplos:

1) Determine se a integral abaixo é convergente.

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x\ln(x)}\,dx$$

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1/x} = \infty$$

Portanto, essa integral diverge.

2) Analise a convergência da integral imprópria $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx.$

Nesse caso, a função $g(x) = \frac{1}{1-x}$ não está definida no extremo direito do intervalo. Assim, devemos adaptar a definição de integral imprópria a essa situação.

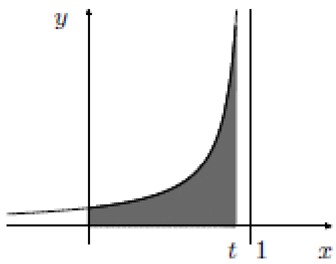
Devemos, então, estudar o limite

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x}\,dx &= \lim_{t\to 1^-} [-\ln|1-x|]\Big|_0^t = \\ &= \lim_{t\to 1^-} \left(\ln \frac{1}{1-t}\right). \end{aligned}$$

Mas, quando $t \to 1^-$, $1-t$ tende a zero, com sinal positivo. Ou seja, $\frac{1}{1-t} \longrightarrow +\infty$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx &= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-x}\,dx = \\ &= \lim_{t\to 1^-} \left(\ln \frac{1}{1-t}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, a integral imprópria $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ diverge.



$g(x) == \frac{1}{1-x}$

3) Analise a convergência da integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx.$

Neste exemplo devemos dividir a integral em dois casos.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx.$$

A escolha do número 0 (zero) para dividir o intervalo de integração foi conveniente, mas puramente casual, pois poderíamos ter escolhido qualquer outro número.

Lembre-se de que $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$.

Vamos, então, considerar $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}\,dx$. Para isso, devemos fazer:

$$\lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{4+x^2}\,dx \;=\; \lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

Assim, $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi}{4}$.

Agora, vamos considerar $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$. Nesse caso, fazemos:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{4+x^2}\,dx \;=\; \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

Novamente, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi}{4}$.

Podemos concluir que a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$ converge e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx \;=\; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

Note que, devido à simetria da função $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$, em relação à origem, o resultado $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}\,dx \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2}\,dx$ não chega a surpreender. No entanto, especialmente nos casos de simetria, é preciso cuidado.

4) Analise a convergência da integral imprópria $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \,dx.$

Como o domínio de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$ é a semi-reta aberta $(0, +\infty)$, a integral apresenta problemas nos dois extremos do domínio de integração. Devemos, portanto, dividi-la em dois casos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x\,dx \;=\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x\,dx \;+\; \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x\,dx.$$

A escolha do número 1 para dividir o intervalo em dois foi por conveniência.

Para calcular $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \; dx$ usamos a integração por partes, fazendo $u = \ln x$ e $dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Assim,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \; dx \;=\; 2\sqrt{x} \ln x \;-\; 4\sqrt{x} \;+\; C.$$

Para a primeira parte, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \; dx &= \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \; dx \;= \\ &= \lim_{t \to 0^+} (-4 - 2\sqrt{t} \ln t \;-\; 4\sqrt{t}) = \\ &= -4. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \;= -4$ converge.

Agora, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \; dx$. Veja como as coisas podem mudar:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \; dx &= \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \; dx \;= \\ &= \lim_{t \to +\infty} (2\sqrt{t} (\ln t \;-\; 2) \;+\; 4 = \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Como essa segunda integral imprópria diverge, dizemos que a integral imprópria $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \, dx$ também diverge.

5)

Sabendo que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, calcule $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \, dx$.

Para resolver o problema deve-se estabelecer uma relação entre as duas integrais. Dessa forma, usaremos a integração por partes na integral

$\int e^{-x^2}\,dx$, colocando $u = e^{-x^2}$ e $dv = dx$. Assim, $du = -2x\,e^{-x^2}\,dx$ e $v = x$. Portanto,

$$\int e^{-x^2}\,dx \;=\; x\,e^{-x^2} \;+ 2\int x^2\,e^{-x^2}\,dx.$$

Assim,

$$\int_0^t e^{-x^2}\,dx \;=\; t\,e^{-t^2} \;+ 2\int_0^t x^2\,e^{-x^2}\,dx.$$

Agora, tomamos o limite:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x^2}\,dx \;=\; \lim_{t\to\infty} t\,e^{-t^2} \;+ 2\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2\,e^{-x^2}\,dx.$$

Como o limite

$$\lim_{t\to\infty} t\,e^{-t^2} \;=\; \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}} = 0,$$

segue que

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2 e^{-x^2}\,dx \;=\; +\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x^2}\,dx.$$

Logo, temos o resultado esperado:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx \;&=\; \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2 e^{-x^2}\,dx = \\ &=\; +\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x^2}\,dx \;= \\ &=\; \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.\end{aligned}$$

6)

Analise a convergência das seguintes integrais impróprias:

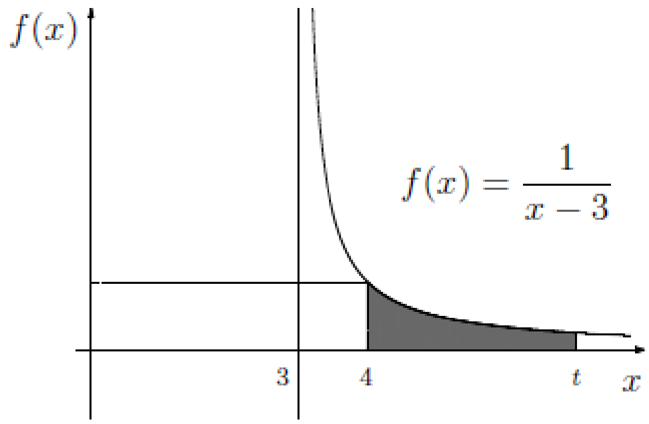
$$(a) \int_4^{\infty} \frac{1}{x-3}\,dx \qquad (b) \int_2^{4} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

$$(c) \int_0^{\infty} \text{sen } x\,dx \qquad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,dx.$$

a)

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x-3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_4^{t} \frac{1}{x-3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|t-3| = +\infty.$$

Podemos interpretar essa resposta da seguinte maneira: se $x \geq 4$, então $\frac{1}{x-3} > 0$. Assim, $\int_4^{t} \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|t-3|$ é a área sob a curva $y = \frac{1}{x-3}$ entre $x = 4$ e $x = t$.



Dizer que $\displaystyle\int_4^{\infty} \frac{1}{x-3}\,dx \;= \infty$ significa que, para cada número $M > 0$, existe um valor de t suficientemente grande tal que $\displaystyle\int_4^{t} \frac{1}{x-3}\,dx \;= \ln|t-3|$ é maior do que M.

Em outras palavras, existe um valor de t cuja área sob a curva correspondente supera o valor de M. Veja que isso ocorre para todos os valores $M > 0$. Por exemplo, se $M = 1000$,

$$\int_4^{10^{500}} \frac{1}{x-3}\,dx \quad = \quad \ln|10^{500} - 3| \approxeq \; 1151,292 \; > \; 1000.$$

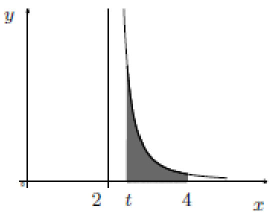
É verdade que os valores de t precisam ser muito grandes, relativos aos valores de M, mas isso não é nenhum problema.

b)

$$\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \quad = \quad \lim_{t\to 2^+} \int_t^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \; = \lim_{t\to 2^+} \; -\frac{1}{2} + \frac{1}{t-2}.$$

Quando $t \to 2^+$, $\; t-2 \to 0^+$ e, portanto, $\displaystyle\lim_{t\to 2^+} \frac{1}{t-2} - \frac{1}{2} \; = \; +\infty.$

A interpretação, nesse item, é semelhante à do item anterior. A diferença é que as áreas $\displaystyle\int_t^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{t-2}$, com $2 < t < 4$, aumentam indefinidamente na medida em que tomamos valores para t mais e mais próximos de 2, pelo lado direito.



$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

c)

$$\int_0^{\infty} \text{sen}\; x\,dx \quad = \quad \lim_{t\to\infty} \int_0^t \text{sen}\; x\,dx \quad = \quad \lim_{t\to\infty} [1 - cos\, t].$$

Nesse caso, não existe o limite. Isto é, a função $f(t) = 1 - \cos t$, na medida em que os valores de t crescem, fica oscilando entre 0 e 2.

d)

Nesse caso, devemos escrever a integral como a soma de duas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} \cos x \, dx \;+\; \int_{-\infty}^{0} \cos x \, dx \;=\; 0.$$

Novamente, como no item anterior, a integral não converge, uma vez que, por exemplo

$$\int_{0}^{\infty} \cos x \, dx \;=\; \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \cos x \, dx \;=\; \lim_{t\to\infty} \operatorname{sen} t$$

e $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{sen} t$ não existe, pois $g(t) = \cos\ t$ fica oscilando entre -1 e 1, quando $t \longrightarrow \infty$.

Você pode observar como os exemplos diferem. É conveniente reservar o termo *divergente* para situações nas quais o limite é infinito ($+\infty$ ou $-\infty$), como nos casos (a) e (b). Nos casos como (c) e (d), diremos que a integral imprópria é indefinida. Assim, $\displaystyle\int_{4}^{\infty} \frac{1}{x-3}\, dx$ diverge para $+\infty$ e $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen}\, x \, dx$ é indefinida.

Observação: Convergência de algumas funções

Nas afirmações abaixo, a é um número real maior do que 0 (zero).

- Se $r > 1$, então $\displaystyle\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^r}\, dx$ é convergente.
- Se $r \leq 1$, então $\displaystyle\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^r}\, dx$ é divergente.
- Se $r > 0$, então $\displaystyle\int_{b}^{\infty} e^{-rx}\, dx$ é convergente.

Realmente, se $r \neq 1$, então $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_{a}^{t} \frac{1}{x^r}\, dx \;=\; \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{t^{r-1}} - \frac{1}{a^{r-1}}\right).$

Se $r > 1$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{r-1}} = 0$ e a integral imprópria converge: $\displaystyle\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^r}\, dx = \frac{1}{(r-1)a^{r-1}}.$

3.3- Critérios de Convergência

i) Critério da Comparação

Este critério possui essa denominação por se basear na comparação de duas funções.

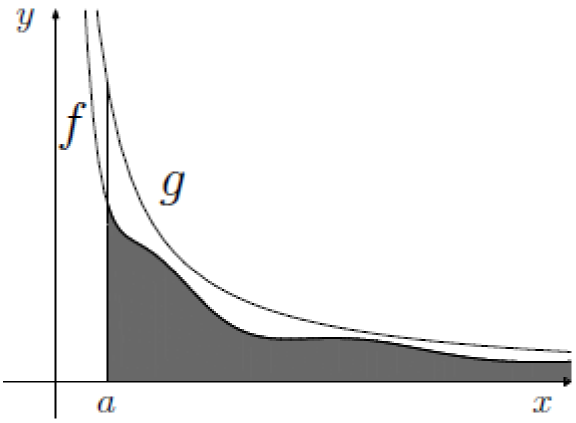
Sejam f e g duas funções contínuas, definidas e, [a, ∞), tais que

a ≤ f(x) ≤ g(x).

Nessas condições,

- se $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, então $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ também converge;
- se $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, então $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ também diverge.

Obs.: Esse critério só pode ser empregado quando ambas as funções são positivas. Note que se a maior converge, a menor converge. Se a menor diverge, a maior também diverge.



Exemplo:

Analise a convergência da integral imprópria

$$\int_4^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(x-2)^2}\,dx.$$

Para utilizar corretamente o critério é necessário determinar qual função será usada como parâmetro para a comparação, ou seja, qual função será f e qual será g?

Observa –se que há um quociente, que a função do numerador é limitada (y = sen²x) e que o denominador é uma função polinomial do 2º grau.

Para mostrar que a integral converge, vamos usar para a comparação a integral imprópria $\int_4^\infty \frac{1}{(x-2)^2} dx$. A garantia da convergência dessa integral imprópria é o grau do denominador, visto que estamos integrando sobre a semirreta [4, ∞). Realmente,

$$\int_4^\infty \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \;=\; \lim_{t\to\infty}\int_4^t \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \;=\; \lim_{t\to\infty}\left[\frac{t-4}{2t-4}\right] \;=\; \frac{1}{2}.$$

Devemos nos certificar de que as hipóteses do critério da comparação são satisfeitas.

$$\forall x \in \mathbb{R},\;\; 0 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq 1 \;\text{ e, portanto, se } x \geq 4,$$

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(x-2)^2} \leq \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Podemos concluir dizendo: como $\int_4^\infty \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$ converge, pelo critério da comparação, $\int_4^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(x-2)^2}\,dx$ também converge.

ii) Critério do Limite do Quociente

Este critério é adequado para analisar a convergência de integrais impróprias cujo integrando é o quociente de polinômios.

Sejam f e g duas funções contínuas em [a,∞), tais que f(x) ≥ 0 e g(x) > 0 e $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ = L , com L Є (0, ∞). Isto é, o limite do quociente é um número positivo. Então, as integrais impróprias $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ comportam –se do mesmo modo; ou seja, ou ambas convergem ou ambas divergem.

Exemplos:

Analise a convergência das seguintes integrais impróprias.

1. $$\int_5^{\infty} \frac{x}{2x^3+3x+1}\, dx.$$

Devemos decidir se vamos mostrar a convergência ou a divergência da integral e qual será a integral imprópria usada como parâmetro.

O maior expoente do numerador é 1 e o do denominador é 3. A diferença é 2. Com o $\int_5^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente, vamos mostrar que a integral é convergente.

Observa-se que para valores suficientemente grandes de x, $f = \frac{x}{2x^3+3x+1} \geq 0$ e $g(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. Precisamos calcular o limite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{2x^3+3x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3+3x+1} = \frac{1}{2}.$$

Como L = ½, podemos aplicar o critério e concluir que a integral imprópria $\int_5^{\infty} \frac{x}{2x^3+3x+1}\, dx$ converge.

2. $$\int_{10}^{\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{x+8}\, dx.$$

Vamos considerar o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x+1}}{x+8}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+x}}{x+8} = 3.$$

Como $\int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\, dx$ diverge, o mesmo ocorre com $\int_{10}^{\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{x+8}\, dx$.

Observação: Razão de funcionamento desse critério: como o $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, sabe-se que f(x) ≅ Lg(x), para valores suficientemente grandes de x. Isso indica que o comportamento das integrais impróprias será do mesmo tipo.

Unidade 4- Aplicação de Integrais

4.1- Aplicação de Integrais - Volumes

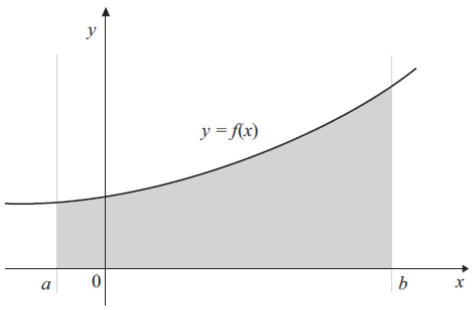
O volume de um sólido exerce um papel importante em muitos problemas nas ciências físicas, tais como, cálculo de centro de massa e de momento de inércia. Por ser mais complicado determinar o volume de um sólido com formato irregular, iniciaremos com objetos que apresentam formas simples, dentre esses os sólidos de revolução.

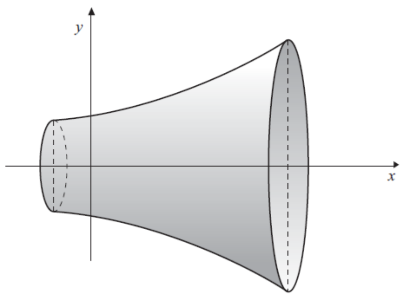
Como sabemos, um sólido de revolução é gerado pela rotação de uma região do plano, em torno de uma reta chamada eixo de revolução, contida no plano.

Seja S, o sólido gerado pela rotação da região do plano limitada por y=f(x), o eixo x, x = a e x = b, em torno do eixo x. Então, o volume V desse sólido é dado por

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx.$$

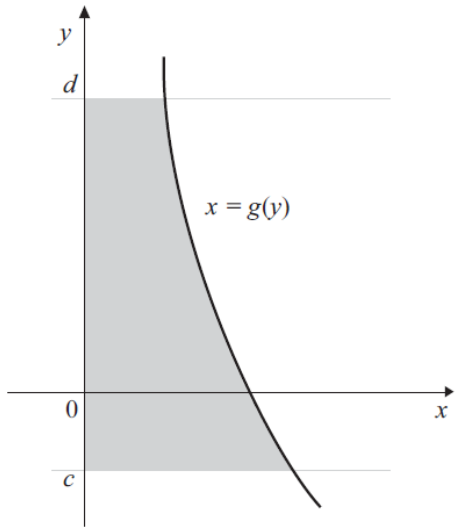
Graficamente





Quando o eixo de revolução é o eixo y e a fronteira da região plana é dada pela curva x = g(y) e o eixo entre y = c e y = d, então o volume V do sólido de revolução é dado por

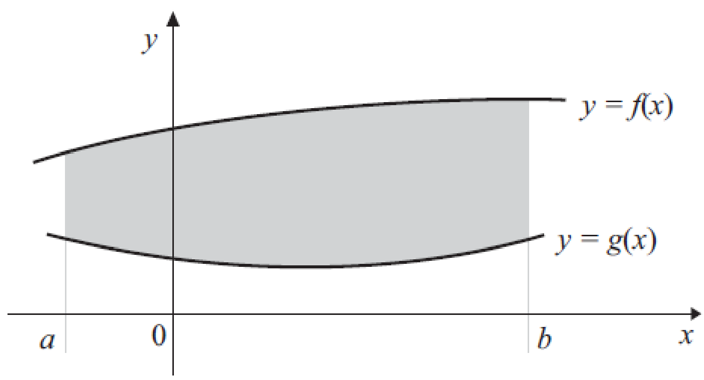
$$V = \pi \int_c^d \left(g\left(y\right)\right)^2 dy.$$

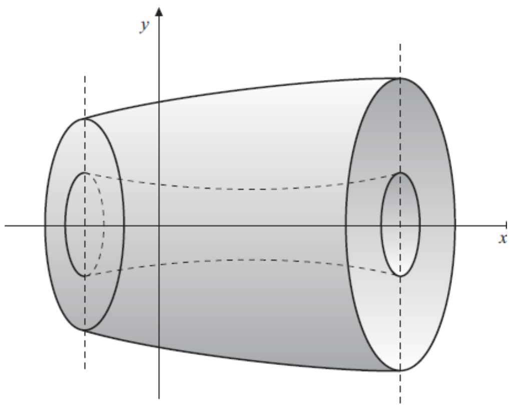


Sejam f(x) e g(x) funções contínuas no intervalo [a,b] e suponhamos que f(x) ≥ g(x) ≥ 0 para todo x Є [a,b]. Então o volume do sólido de revolução gerado pela rotação e torno do eixo x, da região limitada pelas curvas y = f(x) e y = g(x) e as retas x = a e x = b é dado por

$$V = \pi \int_a^b \left[\left(f\left(x\right)\right)^2 - \left(g\left(x\right)\right)^2\right] dx.$$

Graficamente

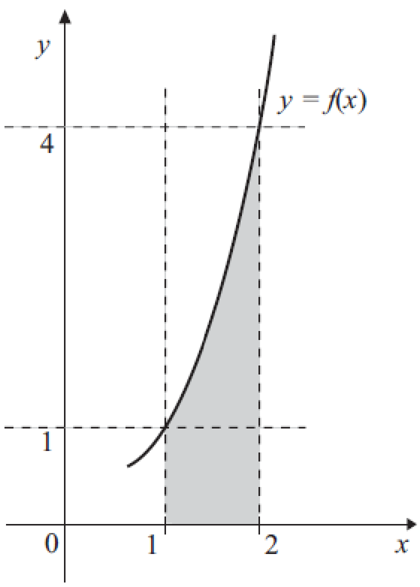




Exemplos:

1) A região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e as retas x = 1 e x = 2, sofrem uma rotação em torno do eixo x. Encontre o volume do sólido de revolução gerado.

Inicialmente construímos o gráfico da curva



Temos:

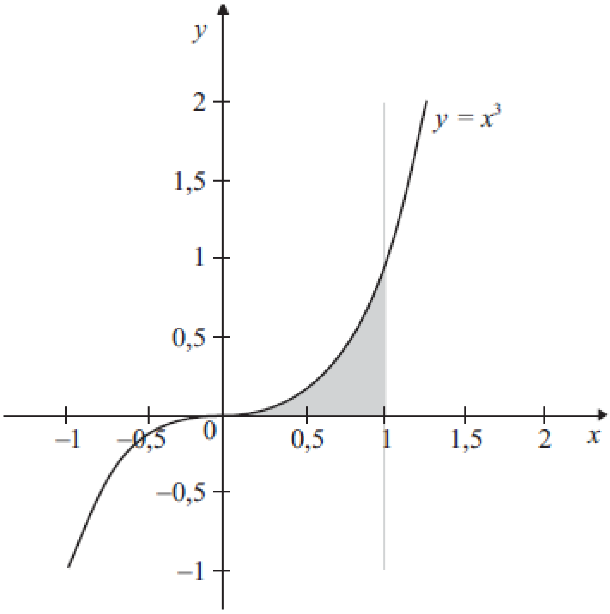
$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \left(x^2\right)^2 dx$$

$$= \pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 = \frac{\pi}{5}\left(32 - 1\right)$$

$$= \frac{31}{5}\pi \text{ , unidades de volume } (u.v.).$$

2) Calcule o volume do sólido que se obtém por rotação da região limitada por $y = x^3$, $y = 0$ e $x = 1$ em torno do eixo y,

Inicialmente construímos o gráfico das curvas dadas.



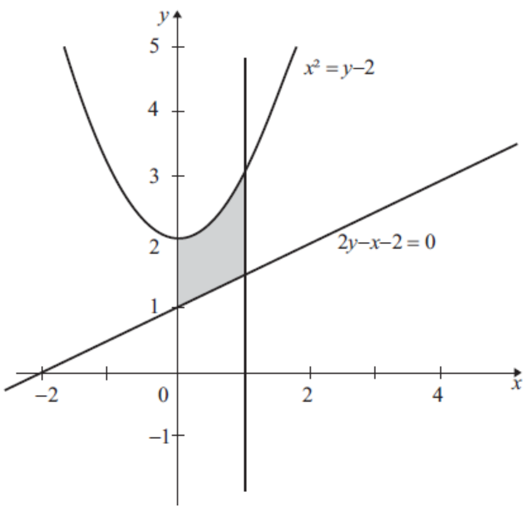
De $y = x^3$ temos $x = y^{1/3}$. Logo, o volume do sólido obtido pela revolução em torno do eixo y é dado por

$$V = \pi \int_c^d \left(g\left(y\right)\right)^2 dy = \pi \int_0^1 y^{2/3} dy$$

$$= \frac{3\pi}{5} y^{5/3} \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5} \ u.v.$$

3) Calcule o volume do sólido que ase obtém por rotação da região limitada por $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ e $x = 1$, em torno do eixo x.

Veja a figura representando a região



Volume do sólido em torno do eixo x

$$V = \pi \int_a^b \left[\left(f(x) \right)^2 - \left(g(x) \right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left[\left(x^2 + 2 \right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 \right] dx$$

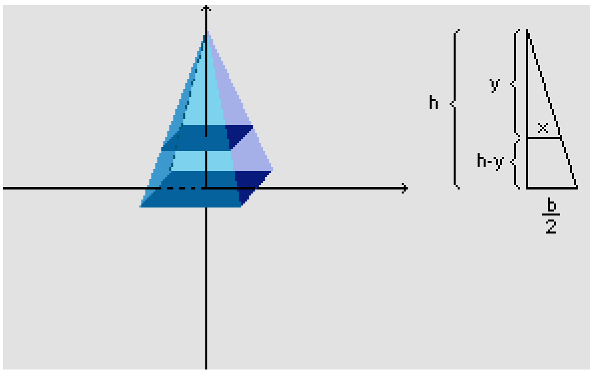
$$= \pi \int_0^1 \left(x^4 + \frac{15}{4}x^2 - x + 3 \right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 3 \right) = \frac{79\pi}{20} \ u.v.$$

4) Usando o Cálculo Integral, mostre que o volume de uma pirâmide reta de base quadrada - sendo b a medida da aresta da base e h a altura da pirâmide - é $V = \frac{1}{3}b^2h$

Colocando o sistema de eixos de modo que o eixo y seja perpendicular à base da pirâmide reta, passando pelo centro, temos:



Para cada corte transversal na altura h - y, temos que a secção obtida é um quadrado, paralelo à base, cuja área é (2x)².

Examinando o corte longitudinal ao lado, por semelhança de triângulos, podemos escrever:

$\frac{b}{2h} = \frac{x}{y}$ e daí $x = \frac{by}{2h}$

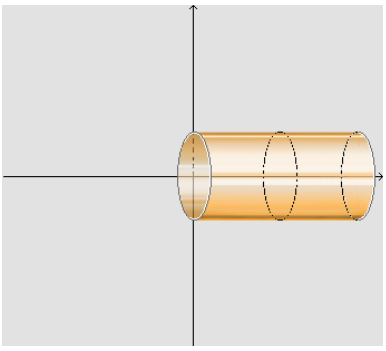
ou seja, a área de cada secção transversal é $A(y) = 4\left(\frac{by}{2h}\right)^2 = \frac{b^2}{h^2}y^2$.

Logo, o volume da pirâmide é dado por:

$$V = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}y^2\,dy = \frac{b^2}{h^2}\cdot\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^h = \frac{1}{3}\cdot b^2h$$

5) Usando o Cálculo Integral, mostre que o volume de um cilindro reto, de altura h e cuja base é um círculo de raio r, é $V = \pi r^2 h$.

Colocando o sistema de eixos de modo que a origem do sistema esteja no centro da base do cilindro e o eixo x seja perpendicular à base do cilindro, temos:



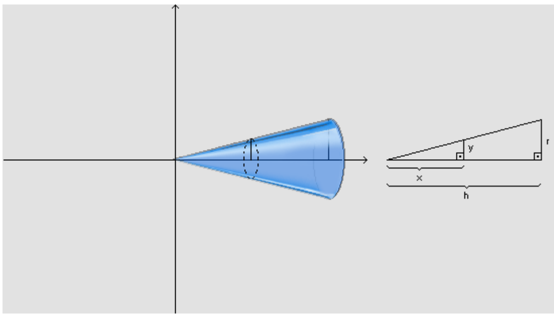
Para cada corte transversal na altura x, temos que a secção obtida é um círculo, paralelo à base, cuja área é πr^2.

Logo, o volume do cilindro é dado por:

$$V = \int_0^h \pi r^2\,dx = \pi r^2 x\Big|_0^h = \pi r^2 h$$

6) Usando o Cálculo Integral, mostre que o volume de um cone reto, de altura h e cuja base é um círculo de raio r, é $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Colocando o sistema de eixos de modo que a origem do sistema esteja no vértice do cone e o eixo x seja perpendicular à base do cone, temos:



Para cada corte transversal na altura x, temos que a secção obtida é um círculo, paralelo à base, cuja área é πy^2.

Examinando o corte longitudinal ao lado, por semelhança de triângulos, podemos escrever:

$\frac{r}{h} = \frac{y}{x}$ e daí $y = \frac{rx}{h}$

ou seja, a área de cada secção transversal é $A(x) = \pi\left(\frac{rx}{h}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2$.

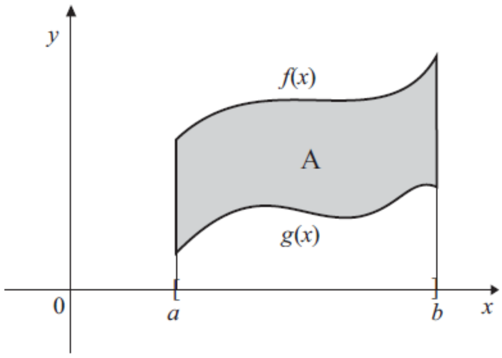
Logo, o volume do cone é dado por:

$$V = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}\cdot\pi r^2 h.$$

4.2- Aplicação de Integrais – Áreas

Abordaremos uma das aplicações da integral definida, iniciando com a determinação da área de uma região R do plano que serviu como motivação para a definição deste importante conceito matemático.

Vamos considerar sempre a região localizada entre os gráficos de duas funções. Suponhamos que f(x) e g(x) sejam funções contínuas no intervalo [a,b] e que f(x) ≥ g(x) para todo x em [a,b]. Assim, a área da região limitada acima por y = f(x), abaixo por y = g(x), à esquerda pela reta x = a e à direita pela reta y = b é $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$, de acordo com figura a a seguir



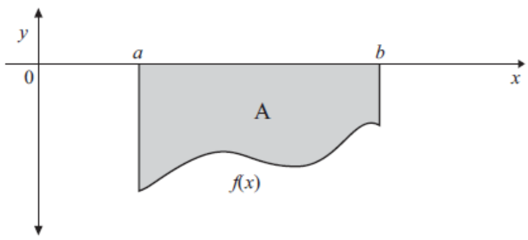
Procedimentos a serem seguidos para o estabelecimento da fórmula:

Passo 1: Deve-se construir o gráfico da região para se determinar qual curva limita acima e qual curva limita abaixo.

Passo 2: Precisa-se determinar os limites de integração. Os limites a e b serão as abscissas x dos dois pontos de interseção das curvas y = f(x) e y = g(x). Para tanto, faz-se f(x) = g(x) e resolve-se a equação resultante em relação a x.

Passo 3: Calcula-se a integral definida para encontrar a área entre as duas curvas.

Obs.: Agora consideraremos a área da figura plana limitada pelo gráfico de f(x), pelas retas x = a e x = b e o eixo x, em que f(x) é uma função contínua sendo f(x) ≤ 0, para todo x em [a,b], conforme figura a seguir.



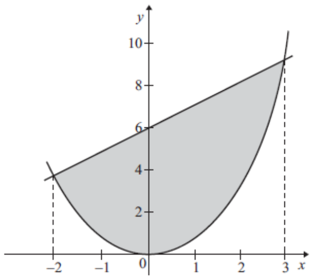
O cálculo da área A é d ado por $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$, ou seja, precisamos calcular a integral definida e considerar o módulo ou valor absoluto da integral definida encontrada.

Exemplos:

1) Determinar a área da região limitada entre as curvas

$y = f(x) = x + 6$ e $y = g(x) = x^2$.

Passo 1: Esboço da região



Passo 2: Para calcular os limites de integração, devemos fazer f(x) = g(x), isto é, $x + 6 = x^2$ ou $x^2 = x + 6$, ou melhor, $x^2 - x - 6 = 0$ que aplicando a fórmula resolutiva nos fornece $x = -2$ e $x = 3$, que serão os limites de integração. Observe, pelo gráfico acima, que $x + 6 \geq x^2$, para todo x em [– 2, 3].

Passo 3: Calculando a área da região limitada por **y** = f(x) = x + 6 e y = g(x)=x² em [– 2, 3] temos

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{3} \left[(x + 6) - x^2 \right] dx = \int_{-2}^{3} \left(x + 6 - x^2 \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{3}$$

$$= \left(\frac{3^2}{2} + 6 \times 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 6 \times (-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 3^2 \right) - \left(\frac{4}{2} - 12 - \frac{-8}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 18 - 9 \right) - \left(2 - 12 + \frac{8}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{9}{2} + 9 \right) - \left(-10 + \frac{8}{3} \right) = \left(\frac{9 + 18}{2} \right) - \left(\frac{-30 + 8}{3} \right)$$

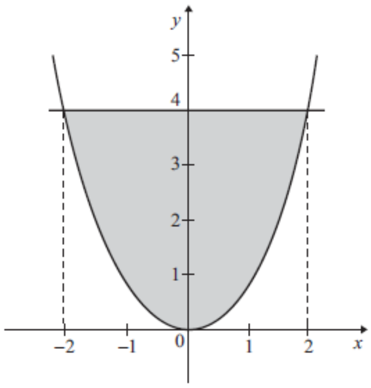
$$= \frac{27}{2} - \frac{-22}{3} = \frac{27}{2} + \frac{22}{3} = \frac{81 + 44}{6} = \frac{125}{6} \ u.a.$$

Portanto, a área limitada por

$$y = f(x) = x + 6 \text{ e } y = g(x) = x^2 \text{ em } [-2, 3] \text{ é } \frac{125}{6}$$

2) Determinar a área da região limitada por y = f(x) = 4 e y = g(x) = x^2.

Passo 1: Esboço da região



Passo 2: Para determinar os limites de integração fazendo f(x) = g(x), temos 4=x^2 ou x^2 = 4. Logo, $\boldsymbol{x} = \pm\sqrt{\mathbf{4}} = \pm\mathbf{2}$, ou seja, x’ = **–** 2 e x’’ = 2. Assim, a = **–** 2 e b = 2.

Passo 3:A área da região limitada por y = f(x) = 4 e y = g(x) = x^2 em [**–** 2, 2] será

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left(4 \times 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \times \ (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{-8}{3}\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$$

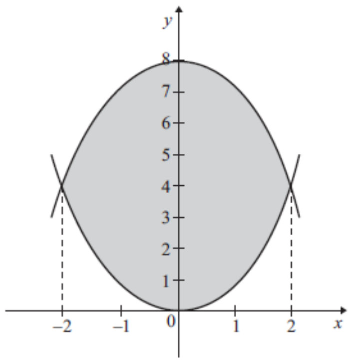
$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - 2 \ \times \ \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{48 - 16}{3} = \frac{32}{3} \ u.a.$$

Portanto, a área limitada por y = f(x) = 4 e y = g(x) = x² em [– 2, 2] é $\frac{32}{3}$ unidades de área.

3) Determinar a área da região limitada por **y = f(x) = 8 – x² e y = g(x) = x².**

Passo 1: Esboço da região



Passo 2: Para encontrar os limites de integração, fazemos f(x) = g(x), isto é , 8–x² = x², que nos dá x' = **–** 2 e x'' = 2. Assim, a = **–** 2 e b = 2.

Passo 3: A área da região limitada por **y = f(x) = 8 – x² e y = g(x) = x² será**

$$A = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - x^2 - x^2 \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(8 - 2\,x^2 \right) dx = \left(8\,x - 2\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left(8 \times 2 - 2 \times \frac{2^3}{3} \right) - \left(8 \times (-2) - 2 \times \frac{(-2)^3}{3} \right)$$

$$= \left(16 - 2 \times \frac{8}{3} \right) - \left(-16 - 2 \times \frac{-8}{3} \right)$$

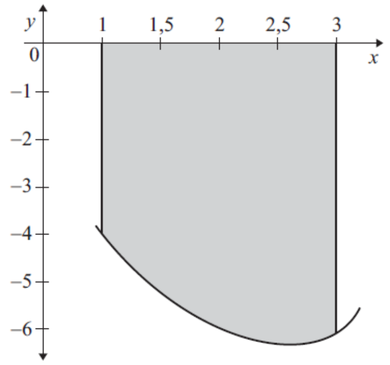
$$= 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = 32 - 2 \times \frac{16}{3}$$

$$= 32 - \frac{32}{3} = \frac{96 - 32}{3} = \frac{64}{3}\ u.a.$$

Portanto a área limitada por **y = f(x) = 8 – x² e y = g(x) = x²** em [– 2, 2] é $\frac{64}{3}$ unidades de área.

4) Determinar a área limitada peal curva y = x² – 5x, o eixo x e as retas x = 1 e x = 3.

Passo 1: Esboço da região



Passo 2: Os limites de integração são a = 1 e b = 3.

Passo 3: A reta limitada pela curva y = x² – 5x, o eixo x e as retas x = 1 e x = 3, será

$$A = \left|\int_1^3 \left(x^2 - 5x\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 5\ \times \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3\right|$$

$$= \left|\left(\frac{3^3}{3} - 5 \times \frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 5 \times \frac{1^2}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\left(\frac{27}{3} - 5 \times \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - 5 \times \frac{1}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\left(9 - \frac{45}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2}\right)\right| = \left|\left(\frac{18-45}{2}\right) - \left(\frac{2-15}{6}\right)\right|$$

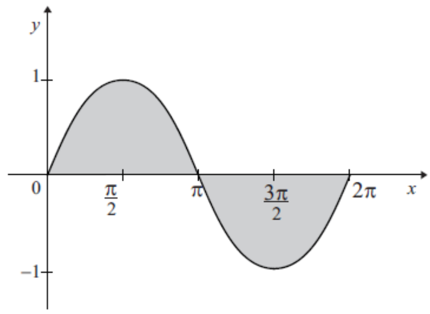
$$= \left|\left(\frac{-27}{2}\right) - \left(\frac{-13}{6}\right)\right| = \left|\frac{-27}{2} + \frac{13}{6}\right|$$

$$= \left|\frac{-81 + 13}{6}\right| = \left|\frac{-68}{6}\right| = \left|\frac{-\ 34}{3}\right| = \frac{34}{3}\ \ u.a.$$

Portanto, a área limitada pela curva y = x² – 5x, o eixo x e as retas x = 1 e x = 3 é $\frac{34}{3}$ unidades de área.

5) Encontrar a área da região limitada pela curva y = f(x) = senx e pelo eixo x de 0 a 2π.

Passo 1: Esboço da região



Passo 2: Para determinar os limites de integração, temos, pelo gráfico anterior, no intervalo [0, π], f(x) = senx ≥ 0 e no intervalo [π, 2 π], f(x) = senx≤0.

Passo 3: A área da região limitada pela curva y = f(x) = senx e pelo eixo x de 0 a 2π será

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx \right| = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right|$$

$$= \left(-\cos \pi - \left(-\cos 0 \right) \right) + \left| \left(-\cos 2\pi - \left(-\cos \pi \right) \right) \right|$$

$$= -(-1) - (-1) + \left| -1 - \left(-(-1) \right) \right|$$

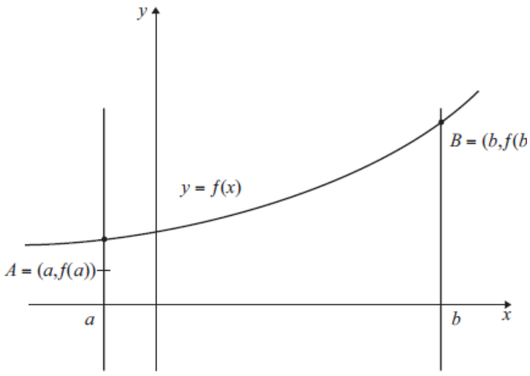
$$= 1 + 1 + \left| -1 - 1 \right| = 2 + \left| -2 \right| = 2 + 2 = 4 \ u.a.$$

Portanto, a área da região limitada pela curva y = f(x) = senx e pelo eixo x de 0 a 2π é 4π unidades de área.

4.3- Aplicação de Integrais – Comprimentos

Comprimento de Arco

Veja a seguir o comprimento de arco de uma curva plana em coordenadas cartesianas. Seja f uma função contínua no intervalo fechado [a,b]. Seja o gráfico da função y = f(x).



Sejam A(a,f(a)) e B(b,f(b)) dois pontos na curva y = f(x). Considere s o comprimento da curva $\widehat{AB}$ do gráfico da função y = f(x). Então, s é dado por

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Exemplos:

1) Determinar o comprimento de arco da curva $y = \frac{x}{2} + 1$, 0≤ x ≤ 3.

Temos:

$$y = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\, dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{\frac{5}{4}}\, dx = \sqrt{\frac{5}{4}}\, x\Big|_0^3 = \frac{3}{2}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, para 0≤ x ≤ 3 é dada por $s = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ unidades de comprimento.

2) Calcule o comprimento do arco da curva 24 xy = x£ + 48 de x = 2 a x = 4.

Temos:

$$24xy = x^4 + 48$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{24}x^3 + \frac{2}{x}$$
$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2}{24} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^4 - 16}{8x^2}.$$

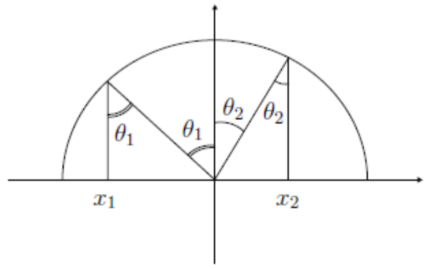
Agora,

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^4 - 16}{8x^2}\right)^2}\, dx$$
$$= \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{1}{64x^4}\left(x^8 + 256 - 32x^4\right)}\, dx$$
$$= \int_2^4 \sqrt{\frac{x^8 + 32x^4 + 256}{64x^4}}\, dx$$

$$= \int_2^4 \sqrt{\frac{(x^4 + 16)^2}{(32x^2)^2}}\, dx = \int_2^4 \frac{\sqrt{(x^4 + 16)^2}}{\sqrt{(32x^2)^2}}\, dx$$
$$= \int_2^4 \left(\frac{x^4 + 16}{8x^2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_2^4 \left(x^2 + 16x^{-2}\right) dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{16}{x}\right]_2^4$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{64}{3} - 4 - \frac{8}{3} + 8\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{56}{3} + 4\right] = \frac{17}{6} \; u.v.$$

3) Cálculo do comprimento de um setor de circunferência.

Vamos calcular o comprimento de um arco de circunferência de raio r, correspondente a um ângulo $\alpha < \pi$. Vamos posicionar tal setor de tal forma que ele esteja na parte superior de x^2 + ^{y2} = r^2, e sejam x_1 e x_2 os pontos correspondentes à projeção do setor no eixo Ox.



$\theta_1 + \theta_2 = \alpha$

Então, o comprimento desse arco é

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \;=\; \int_{x_1}^{x_2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx.$$

Para resolver essa integral, fazemos a substituição trigonométrica $x = rsen\theta$, em que θ_1 e θ_2 são os ângulos que correspondem aos valores x_1 e x_2, respectivamente: $x_1 = rsen\theta_1$ e $x_2 = rsen\theta_2$. Temos $dx = r\cos\theta d\theta$ e $\sqrt{r^2 - x^2} = rcos\theta$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx \;&=\; \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r^2 \cos\theta}{r \cos\theta}\, d\theta \;= \\ &=\; \int_{\theta_1}^{\theta_2} r\, d\theta \;=\; r\,(\theta_2 - \theta_1) \;=\; r\,\alpha.\end{aligned}$$

Unidade 5- Teoremas Importantes Para o Cálculo

5.1-Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece a importante conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O primeiro surgiu a partir do problema de se determinar a reta tangente de uma curva em um ponto, enquanto o segundo surgiu a partir do problema de se encontrar a área de uma figura plana.

Barrow, professor de Newton em Cambridge, descobriu que os dois problemas estão intimamente relacionados, percebendo que os processos de diferenciação e integração são processos inversos. Entretanto, foram Newton e Leibniz, independentemente, que exploraram essa conexão e desenvolveram o Cálculo.

Em particular, eles perceberam que o Teorema Fundamental permitia encontrar a área de uma figura plana de uma forma muito fácil, sem a necessidade de se calcular a soma de áreas de um número indefinidamente grande de retângulos, mas sim usando a antiderivada da função envolvida.

Teorema: Seja **f** uma função contínua no intervalo [a,b]. A função **F**, dada por ,

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável em todos os pontos interiores ao intervalo]a,b[e sua derivada é dada por F'(x)=f(x).

O **Teorema Fundamental do Cálculo** nos permite facilmente calcular áreas pois, a partir dele, podemos mostrar que:

Consequência: Se **f** é uma função contínua no intervalo [a,b], então , onde **G** é

$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ uma qualquer **primitiva de f**, isto é, tal que G'=f.

Exemplos:

1-Calcular as áreas das regiões delimitadas pelas curvas.

a) $y = x^2$ e $y = 2x$

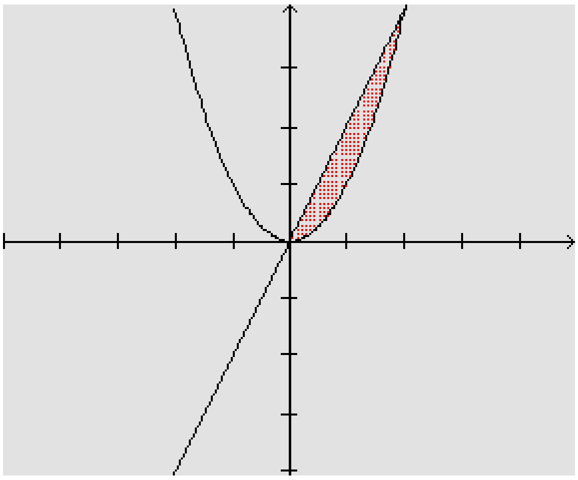
b) $y = x^2$ +3 e $y = 2x + 3$

c) $y = x^2$ -3 e $y = 2x - 3$

É possível estabelecer alguma conclusão a partir das áreas calculadas?

Solução:

a) Vamos calcular a área da região compreendida entre os gráficos de $y=x^2$ e $y = 2x$.



Para tanto, precisamos resolver a equação $x^2=2x$, a fim de obter os pontos que são comuns aos dois gráficos e que, portanto, fornecem o intervalo de integração:

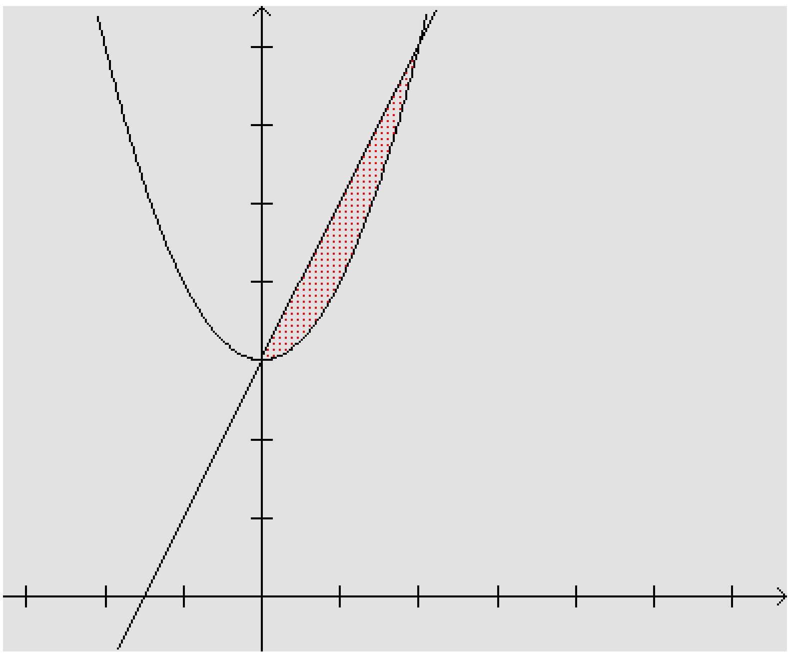
$x^2-2x=0$

de onde x=0 ou x=2.

Assim, a área da região assinalada é dada por:

$$A = \int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = 4 - \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$$
.

b) Vamos calcular a área da região entre os gráficos de $y=x^2+3$ e $y=2x+3$.



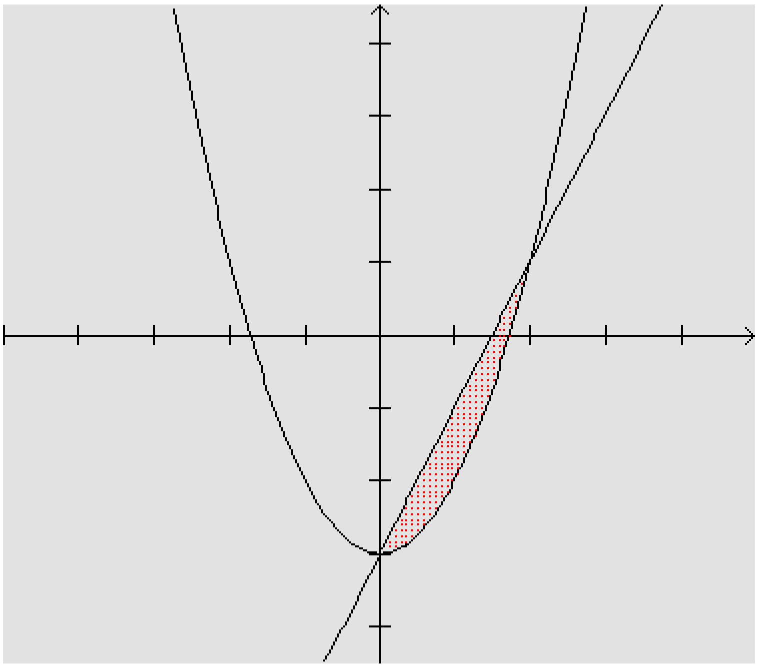
Resolvendo $x^2 + 3 = 2x + 3$, obtemos x=0 ou x=2.

Logo, a área será dada por:

$$A = \int_0^2 (2x+3)\,dx - \int_0^2 (x^2+3)\,dx = \left(x^2 + 3x\right)\Big|_0^2 - \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

que é igual à área da região do Item a).

c) Vamos calcular a área da região entre os gráficos de $y = x^2 - 3$ e $y = 2x - 3$.



Resolvendo $x^2 - 3 = 2x - 3$, obtemos x=0 ou x=2.

Logo, a área será dada por:

$$A = \int_0^2 (2x-3)\,dx - \int_0^2 (x^2-3)\,dx = \left(x^2 - 3x\right)\Big|_0^2 - \left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

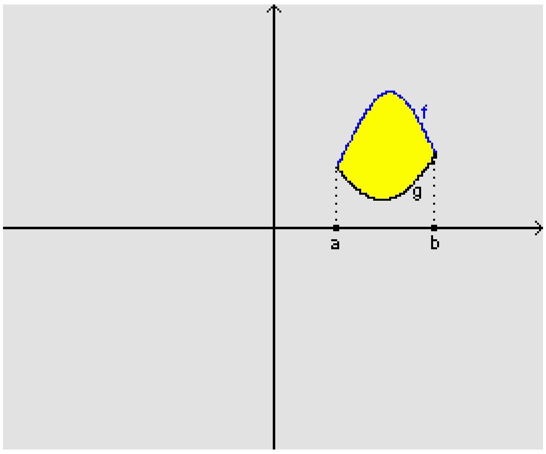
que é igual à área da região do Item a).

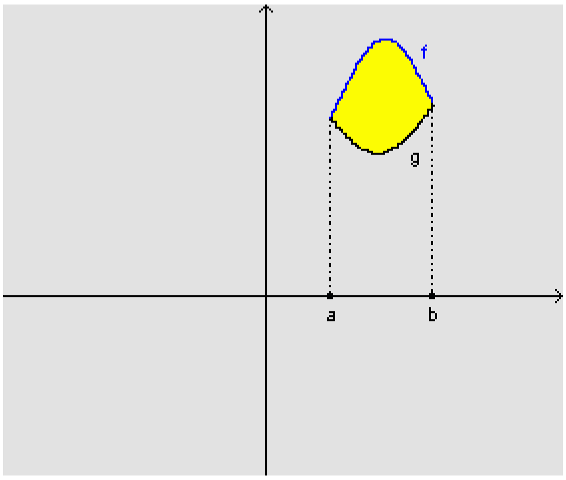
Conclusão:

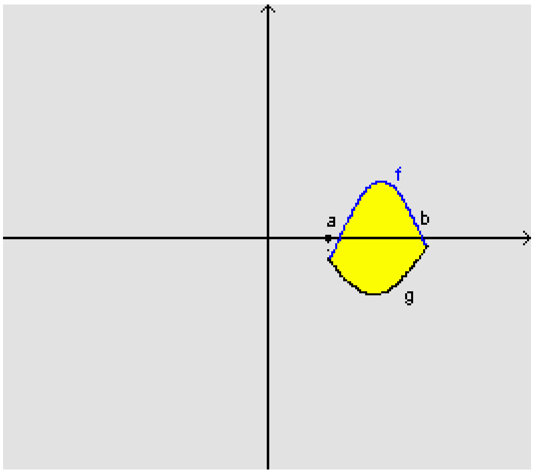
De modo geral, considerando:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

então A é a área da região compreendida entre os gráficos de **f** e **g**.







Já nas figuras, temos:

$$\int_a^b [f(x)+C]dx - \int_a^b [g(x)+C]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b Cdx - \int_a^b g(x)dx - \int_a^b Cdx = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

pois usamos as propriedades da integral definida. Dessa maneira, concluímos algo já esperado, ou seja, que uma translação vertical da figura não altera sua área.

2-Encontrar uma primitiva **F** da função $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x$ que satisfaça F(1)=1.

Solução:

Sendo $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x$, vamos encontrar todas as primitivas de **f**, ou seja, todas as funções cuja derivada é a função **f**.

Assim, encontramos:

$$F(x) = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{x^2}{2} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{x^2}{2} + C$$

, onde C é um número real qualquer.

Como foi dado que F(1)=1, esse fato nos permite determinar uma única função da família de primitivas. Com efeito,

$$1 = F(1) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} + C$$

Logo,

$$C = -\frac{1}{10}$$

Assim, a função procurada é:

$$F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{10}$$

3- Encontrar uma função **f** tal que $f'(x) + \operatorname{sen} x =$ 0 e f(0)=2.

Solução:

Temos f'(x)=–sen x.

Logo

f(x)=cos x+C, onde C é um número real qualquer.

Como f(0)=2, temos:

2=f(0) =cos 0+C

de onde C=1.

Assim , a função procurada é f(x)=cos x+1.

4- Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obter a derivada de cada uma das funções seguintes:

a) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+3t}\, dt$

b) $g(y) = \int_y^{3y} \operatorname{sen}^5 t\, dt$

c) $g(u) = \int_u^{u+2} \frac{\operatorname{sen} t}{2t}\, dt$

d) $g(v) = \int_v^{3v} e^{t^2} dt$

e) $g(z) = \int_{z+1}^{z^3} \sqrt{1-\operatorname{sen}^5 t}\, dt$

Solução:

Sendo $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+3t}\, dt$, queremos encontrar sua derivada.

Entretanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$g(x) = \int_0^x \sqrt{1+3t}\, dt = F(x) - F(0)$ onde F é uma qualquer primitiva de $f(t) = \sqrt{1+3t}$, isto é,

$F'(t) = \sqrt{1+3t}$

Logo,

$g'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \sqrt{1+3t}\,dt\right] = \frac{d}{dx}[F(x) - F(0)] = F'(x)$ pois F(0) é uma constante.

Dessa forma,

$g'(x) = F'(x) = \sqrt{1+3x}$

b) Sendo $g(y) = \int_y^{3y} sen^5\, t\, dt$, queremos encontrar sua derivada.

Entretanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$g(y) = \int_y^{3y} sen^5\, t\, dt = F(3y) - F(y)$ onde F é uma qualquer primitiva de $f(t) = sen^5\, t$,

isto é,

$F'(t) = sen^5\, t$

Logo,

$g'(y) = \frac{d}{dy}\left[\int_y^{3y} sen^5\, t\, dt\right] = \frac{d}{dy}[F(3y) - F(y)] = F'(3y).3 - F'(y)$

pois usamos a Regra da Cadeia, ou da derivada da função composta.

Dessa forma,

$g'(y) = 3.F'(3y) - F'(y) = 3.sen^5(3y) - sen^5\, y$.

c) Sendo $g(u) = \int_u^{u+2} \frac{sen\, t}{2t}\, dt$, queremos encontrar sua derivada.

Entretanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$g(u) = \int_u^{u+2} \frac{\text{sen } t}{2t} dt = F(u+2) - F(u)$ onde F é uma qualquer primitiva de $f(t) = \frac{\text{sen } t}{2t}$,

isto é,

$F'(t) = \frac{\text{sen } t}{2t}$.

Logo,

$$g'(u) = \frac{d}{du}\left[\int_u^{u+2} \frac{\text{sen } t}{2t} dt\right] = \frac{d}{du}[F(u+2) - F(u)] = F'(u+2).1 - F'(u)$$

pois usamos a Regra da Cadeia, ou da derivada da função composta.

Dessa forma,

$$g'(u) = F'(u+2) - F'(u) = \frac{\text{sen}(u+2)}{2(u+2)} - \frac{\text{sen } u}{2u}$$

d) Sendo $g(v) = \int_v^{3v} e^{t^2} dt$, queremos encontrar sua derivada.

Entretanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$g(v) = \int_v^{3v} e^{t^2} dt = F(3v) - F(v)$ onde F é uma qualquer primitiva de $f(t) = e^{t^2}$,

isto é,

$F'(t) = e^{t^2}$.

Logo,

$g'(v) = \frac{d}{dv}\left[\int_v^{3v} e^{t^2} dt\right] = \frac{d}{dv}[F(3v) - F(v)] = F'(3v).3 - F'(v)$ pois usamos a Regra da Cadeia, ou da derivada da função composta.

Dessa forma,

$$g'(v) = 3.F'(3v) - F'(v) = 3.e^{9v^2} - e^{v^2}$$

e) Sendo $g(z) = \int_{z+1}^{z^3} \sqrt{1 - sen^5\, t}\, dt$, queremos encontrar sua derivada.

Entretanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$g(z) = \int_{z+1}^{z^3} \sqrt{1 - sen^5\, t}\, dt = F(z^3) - F(z+1),$$

onde F é uma qualquer primitiva de $f(t) = \sqrt{1 - sen^5\, t}$,

isto é,

$$F'(t) = \sqrt{1 - sen^5\, t}$$

Logo,

$$g'(z) = \frac{d}{dz}\left[\int_{z+1}^{z^3} \sqrt{1 - sen^5\, t}\, dt\right] = \frac{d}{dz}\left[F(z^3) - F(z+1)\right] = F'(z^3).3z^2 - F'(z+1).1$$

pois usamos a Regra de Cadeia, ou da derivada da função composta.

Dessa forma,

$$g'(z) = 3z^2.F'(z^3) - F'(z+1) = 3z^2.\sqrt{1 - sen^5(z^3)} - \sqrt{1 - sen^5(z+1)}$$

5- Encontrar o valor das integrais definidas.

a) $\int_2^3 x^3\, dx$

b) $\int_0^3 x^{3/5}\, dx$

c) $\int_\pi^{4\pi} |sen\, x|\, dx$

d) $\int_1^{\pi/2} cotg\, x.\, cossec\, x\, dx$

e) $\int_0^3 f(x)dx$, sendo $f(x) = \begin{cases} -x^5 & se\ \ 0 \le x < 1 \\ sen(\pi x) - 1 & se\ \ 1 \le x \le 3 \end{cases}$

Solução:

a)

$$\int_2^3 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_2^3 = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4}$$

Observemos que, dada uma função **f**, para encontrar uma primitiva qualquer, precisamos pensar "ao contrário" de quando derivamos, pois buscamos uma função cuja derivada é a função **f**.

b)

$$\int_0^3 x^{3/5}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1}\right|_0^3 = \left.\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}\right|_0^3 = \frac{5}{8}\sqrt[5]{3^8}$$

Observemos que, dada uma função **f**, para encontrar uma primitiva qualquer, precisamos pensar "ao contrário" de quando derivamos, pois buscamos uma função cuja derivada é a função **f**.

c)

Cálculo de: $\int_\pi^{4\pi} |\text{sen}\,x|\,dx$

Como $|\text{sen}\,x|$ =sen x, para $x \in [2\pi, 3\pi]$ e $|\text{sen}\,x| = -\text{sen}\,x$, para $x \in [\pi, 2\pi]$ ou $x \in [3\pi, 4\pi]$, podemos escrever:

$$\int_\pi^{4\pi} |\text{sen}\,x|\,dx = \int_\pi^{2\pi} |\text{sen}\,x|\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} |\text{sen}\,x|\,dx + \int_{3\pi}^{4\pi} |\text{sen}\,x|\,dx =$$

$$= \int_\pi^{2\pi} -\text{sen}\,x\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \text{sen}\,x\,dx + \int_{3\pi}^{4\pi} -\text{sen}\,x\,dx =$$

$$= \cos x\Big|_\pi^{2\pi} + (-\cos x)\Big|_{2\pi}^{3\pi} + \cos x\Big|_{3\pi}^{4\pi} =$$

$$= 1-(-1) + (1-(-1)) + 1-(-1) = 2+2+2 = 6$$

Observa-se que, dada uma função **f**, para encontrar uma qualquer primitiva, precisamos pensar "ao contrário" de quando derivamos, pois precisamos encontrar uma função cuja derivada é a função **f**.

d)

$$\int_1^{\pi/2} \text{cotg}\, x.\ \text{cossec}\, x\, dx = \left(-\text{cossec}\, x\right)\Big|_1^{\pi/2} = -1 + \text{cossec}\, 1 = -1 + \frac{1}{\text{sen}\, 1}$$

pois $\frac{d}{dx}\left(\text{cossec}\, x\right) = -\text{cotg}\, x.\ \text{cossec}\, x$

e)

$\int_0^3 f(x)dx$ sendo $f(x) = \begin{cases} -x^5 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \text{sen}(\pi x) - 1 & \text{se } 1 \le x \le 3 \end{cases}$

Observemos que **f** é contínua no intervalo [1,3]. Dessa forma, podemos escrever:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 -x^5\ dx + \int_1^3 \left[\text{sen}(\pi x) - 1\right]\ dx = -\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 + \left(\frac{-\cos(\pi x)}{\pi} - x\right)\Big|_1^3 =$$

$$= -\frac{1}{6} + \left[\left(\frac{-\cos(3\pi)}{\pi} - 3\right) - \left(\frac{-\cos\pi}{\pi} - 1\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{6} + \left[\frac{1}{\pi} - 3 - \frac{1}{\pi} + 1\right] = -\frac{1}{6} - 2 = -\frac{13}{6}$$

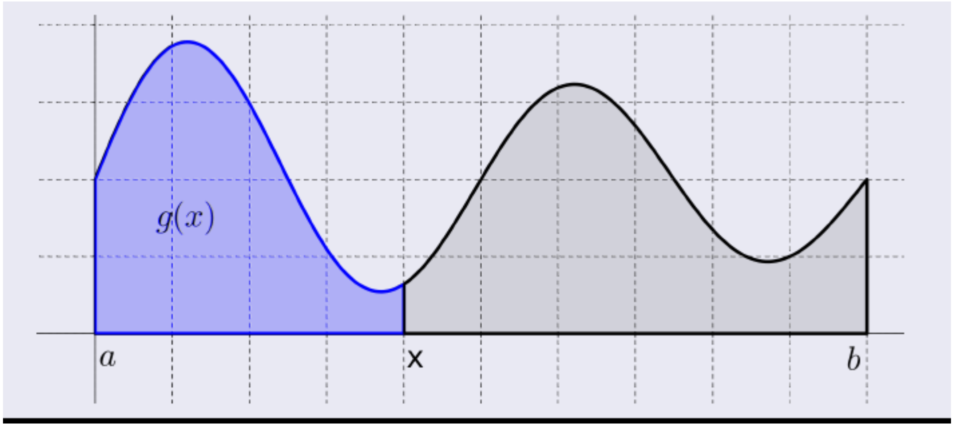
Revisando:

O teorema fundamental do cálculo (TFC) estabelece uma relação entre os conceitos de derivada e integral.

Função definida por uma Integral

Dada uma função contínua f : [a; b] ! R, podemos definir

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \le x \le b.$$



Exemplo:

Use a definição de integral para encontrar uma expressão para a função

$$g(x) = \int_0^x t dt.$$

Solução:

$$g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Observação: Note que g'(x) = f(x), ou seja, g é uma primitiva de f.

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 1

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a função

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b,$$

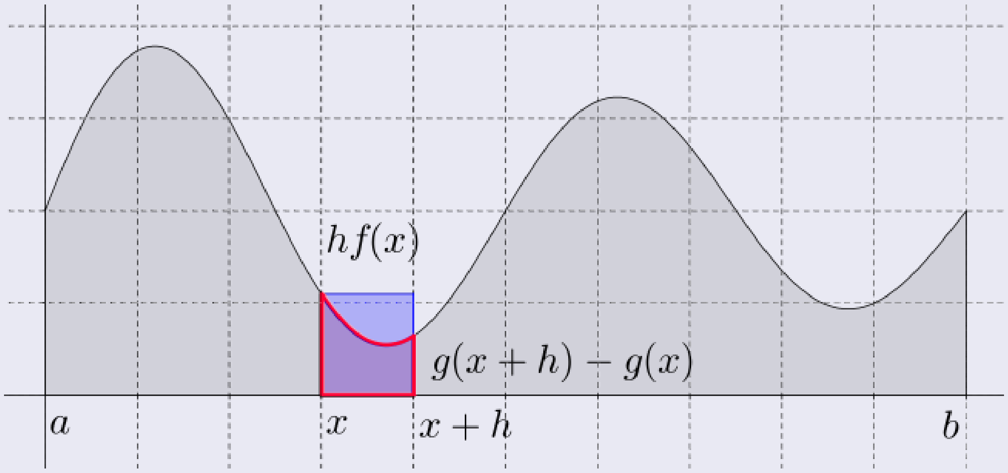
*é **contínua em** $[a, b]$, **derivável em** (a, b) e satisfaz*

$$g'(x) = f(x),$$

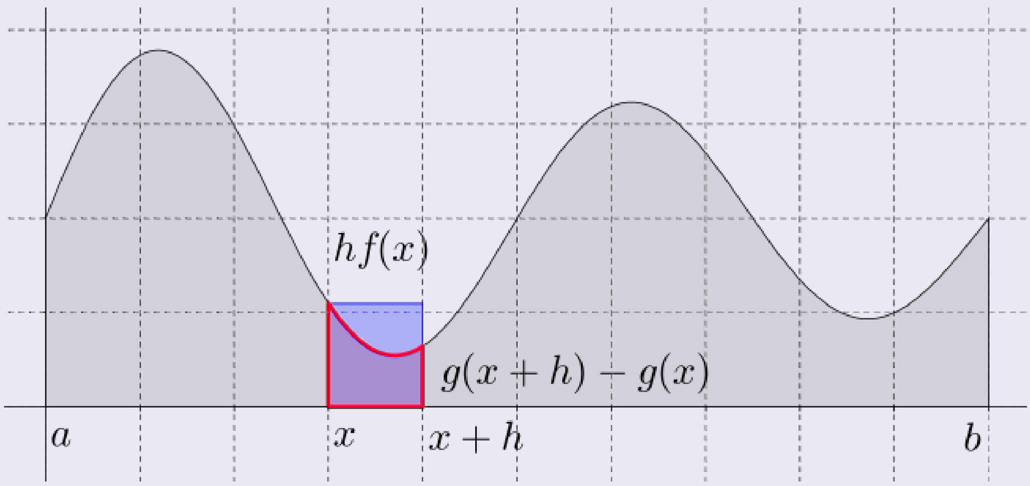
ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

Ideia da Demonstração:

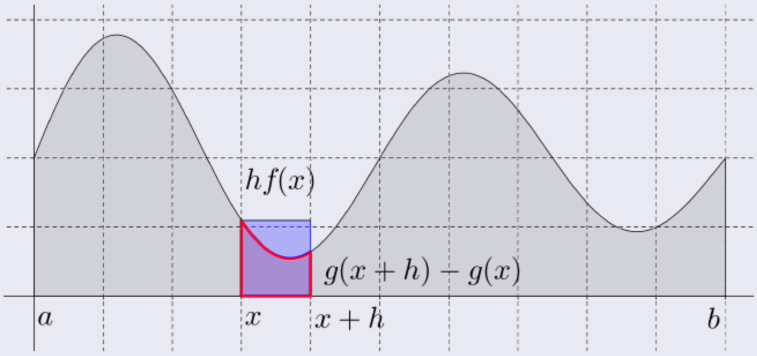


A diferença $g(x+h) - g(x)$ fornece a área sob a curva $y = f(x)$ entre x e $x+h$, para $h > 0$.



Para h pequeno, a área pode ser aproximada pela área do retângulo com altura $f(x)$ e largura h, ou seja,

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x).$$



Dividindo ambos os termos por h e tomando o limite, obtemos:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Exemplo:

Encontre a derivada da função.

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Solução:

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Exemplo:

Determine.

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^4} \sec t\ dt\right].$$

Solução:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^4} \sec t\ dt\right] = 4x^3 \sec(x^4).$$

Teorema Fundamental do Cálculo – Parte 2

Se f for contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b,$$

em que F é uma primitiva qualquer de f.

Exemplo:

$$I = \int_1^3 e^x dx.$$

Solução:

$$I = e^3 - e.$$

Exemplo:

Determine a área sob a parábola y = x² de 0 a 1.

$$A = \frac{1}{3}.$$

Exemplo:

Calcule.

$$I = \int_3^6 \frac{1}{x} dx.$$

Solução:

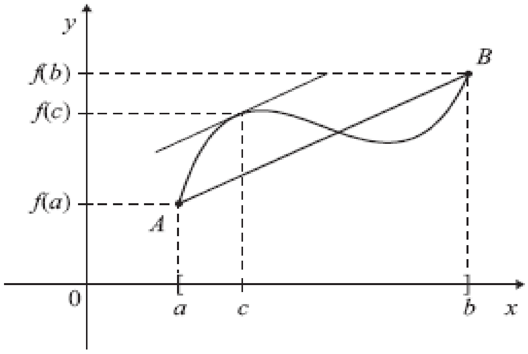
$$I = \ln 2.$$

5.2-Teorema do Valor Médio (TVM)

Suponha que a função *f* seja contínua no intervalo fechado [*a,b*] e que $f'(x)$ exista no intervalo aberto a<x<b. Então, existe pelo menos um valor *c* entre *a e b*, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometricamente, o teorema afirma que existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico da função no ponto *(c,f(c))* é paralela à reta que passa pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ e, como indica a figura 5.1 a seguir:



Exemplo: Seja $f(x) = x^2$ definida no intervalo [-1,3]. Calcular o valor de *c* que o TVM garante existir.

Resolução: Aqui a = -1 e b = 3. Vamos calcular *f(a) e f(b)*, assim

$f(a) = f(-1) = (-1)^2 = 1$ e $f(b) = f(3) = 3^2 = 9$.

Como $f(x) = x^2$ é contínua para todo x, $f'(x) = 2x$ existe em -1<*x*<3 e $f'(c) = 2c$ para -1<*c*<3, temos

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow 2c = \frac{9 - 1}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1,$$

ou seja,

$c = 1$.

Portanto, o valor de *c* que o TVM garante existir em (-1,3) vale 1.

Exemplo: Seja $f(x) = x^3$, $a = -2$ e $b = 2$. Determine os pontos desse intervalo onde se verifica a afirmação do teorema do valor médio.

Resolução: A função é um polinômio e como tal satisfaz as hipóteses do TVM.

Queremos determinar $c \in (-2,2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Assim, $f'(x) = 3x^2$ e $f'(c) = 3c^2$ para $c \in (-2,2)$. Então

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{8 - (-8)}{2 - (-2)} = 4,$$

de forma que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow 3c^2 = 4 \Rightarrow c^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Logo, os dois valores de *c* são: $c_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $c_2 = +\frac{2}{\sqrt{3}}$ entre a=-2 e b=2 nos quais a tangente à curva é paralela à corda que passa pelos pontos (-2,-8) e (2,8).

Portanto, os pontos onde se verifica a afirmação do TVM são $c_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $c_2 = +\frac{2}{\sqrt{3}}$.

5.2.1- Regra de L´Hôspital.

Vamos estudar uma aplicação das derivadas, que consiste num modo bastante útil de calcular limites de formas indeterminadas, a chamada regra (ou Teorema) de L’Hospital que nos permite levantar indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, provenientes do cálculo do limite do quociente de duas funções deriváveis.

Queremos calcular o limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, nos seguintes casos:

(a) $f(x)\to 0$ e $g(x)\to 0$ quando $x\to a$;

(b) $f(x)\to\infty$ e $g(x)\to\infty$ quando $x\to a$.

Em ambos, calculamos $f'(x)$, $g'(x)$ e $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se este limite existe segue que $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ também existe.

Caso a indeterminação continua, isto é, $f'(x)$ e $g'(x)$ satisfazem (a) e (b), calcule $f''(x)$ e $g''(x)$ e $\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. E assim por diante.

Exemplo 1: Usando a regra de L'Hospital, calcular o valor do limite

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}.$$

Resolução: Aqui $f(x)=x^2-x-12$ e $g(x)=x^2-3x-4$.

$$\lim_{x\to 4}f(x)=\lim_{x\to 4}(x^2-x-12)=4^2-4-12=0$$

e

$$\lim_{x\to 4}g(x)=\lim_{x\to 4}(x^2-3x-4)=4^2-3\cdot 4-4=0$$

Como $\lim_{x\to 4}f(x)=0$ e $\lim_{x\to 4}g(x)=0$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Calculando $f'(x)$ vem $f'(x)=2x-1$ e calculando $g'(x)$ vem $g'(x)=2x-3$.

Aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-1}{2x-3}=\frac{2\cdot 4-1}{2\cdot 4-3}=\frac{7}{5}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\frac{7}{5}.$$

Exemplo: Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-e^x}$.

Resolução: Aqui $f(x) = x$ e $g(x) = 1-e^x$.

$$\lim_{x \to 0} x = 0 \text{ e } \lim_{x \to 0}(1-e^x) = 1-e^0 = 1-1 = 0.$$

Como $\lim_{x \to 0} x = 0$ e $\lim_{x \to 0}(1-e^x) = 0$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Calculando $f'(x)$ e $g'(x)$ vem $f'(x) = 1$ e $g'(x) = -e^x$.

Aplicando a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{-e^x} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-e^x} = -1.$$

Exemplo: Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Resolução: Como $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$ e $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Logo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x}.$$

A indeterminação continua. Aplicando novamente a regra, vem

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(2x\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Exemplo: Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \log x\right)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \text{ e} \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(\log x\right) = \log\left(\lim_{x\to 0} x\right) = \infty.$$

Temos uma indeterminação do tipo $0\times\infty$, pois $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, no caso, $f(x)\to 0$ e $g(x)\to\infty$, quando $x\to 0$.

Vamos escrever

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

obtendo assim as indeterminações do tipo

$$\frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\log x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-2}},$$

ou,

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\log x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-2}}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0}\left(\log x\right) = \log\left(\lim\limits_{x\to 0} x\right) = \infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2} = \infty$, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Aplicando a regra de L'Hospital, vem

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\log x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(x^{-2}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-2\cdot x^{-3}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-2\cdot x^{-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-1-(-3)}}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\log x\right) = 0.$$

5.2.2-Polinômio de Taylor

A fórmula de Taylor é uma extensão do teorema do valor médio. Isto nos motiva a seguinte definição.

Definição 5.1. *Seja* f *uma função tal que* f *e suas n primeiras derivadas* f', f'',..., $f^{(n-1)}, f^{(n)}$ *sejam contínuas em* [*a*,*b*]. *Além disso,* $f^{(n+1)}(x)$ *existe para todo x no intervalo aberto* (*a*,*b*). *Então, a fórmula de Taylor ou polinômio de Taylor de ordem n, no ponto a, da função* f *é definida por*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observação 5.1. No caso de a=0 temos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

a qual é chamado de ***fórmula de Maclaurin*** de $f(x)$

A fórmula de Taylor pode ser utilizada para calcular um valor aproximado de determinada função por meio de somas parciais, por exemplo, calcular um valor aproximando de $\ln(3,74)$, $e^{4,289}$, etc.

Exemplo: Seja $f(x) = \ln x$. Determine a fórmula ou o polinômio de Taylor no ponto a=1, de ordem:

(*i*) 3;

(*ii*) *n*, sendo *n* um número natural qualquer.

(*iii*) Use o polinômio do item (*i*) para calcular um valor aproximado de $\ln(1,1)$.

Resolução: Vamos inicialmente determinar o polinômio de Taylor de ordem 3, no ponto a=1, ou seja, devemos ter

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3.$$

Assim,

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0\,;$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1\,;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1\,;$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2!\,;$$

$$f^{iv}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{iv}(1) = -3!\,;$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,.$$

Logo, respondendo (i), vem

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \,.$$

Ou,

$$\ln x = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 \,,$$

ou seja,

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

Agora, para responder (ii), vem

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}\,.$$

Finalmente, respondendo (iii), temos

Para calcular $\ln(1,1)$, fazendo x=1,1 em (*i*), vem

$$\ln 1{,}1 = 0{,}1 - \frac{1}{2}(0{,}1)^2 + \frac{1}{3}(0{,}1)^3 \,.$$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$$\ln(1,1) = 0,09533$$

Exemplo: Determinar a fórmula ou o polinômio de Taylor de ordem n, no ponto zero da função $f(x) = e^x$.

Resolução: Vamos determinar a expressão

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

É dado que $f(x) = e^x$ então

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^n(x) = e^x,$$

e

Logo,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Portanto, a fórmula ou o polinômio de Taylor de ordem *n*, no ponto zero da função $f(x) = e^x$ é dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Isto significa que para valores de x próximos de zero,

$$e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Observação: Quanto maior *n*, melhor a aproximação.

Por exemplo, fazendo x=1 e n=6, obtemos:

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}.$$

De fato, a soma à direita aproxima o número *e* até a terceira casa decimal, sendo o “erro” igual a $2,26 \times 10^{-4}$.

Exemplo. Seja a função $f(x)=\sqrt{x}$. Obter uma aproximação de Taylor de terceira ordem no ponto a=9.

Resolução: Vamos determinar

$$f(x)=f(9)+\frac{f'(9)}{1!}(x-9)+\frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2+\frac{f'''(9)}{3!}(x-9)^3 .$$

Assim,

$$f(x)=\sqrt{x} \qquad \Rightarrow f(9)=\sqrt{9}=3,$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6},$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4\sqrt[2]{x^3}}=-\frac{1}{4x\sqrt[2]{x}}$$

$$\Rightarrow f''(9)=-\frac{1}{4\cdot 9\cdot\sqrt{9}}=-\frac{1}{4\cdot 9\cdot 3}=-\frac{1}{108},$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{8}.x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8\cdot\sqrt[2]{x^5}}=\frac{3}{8\cdot x^2\cdot\sqrt[2]{x}}$$

$$\Rightarrow f'''(9)=\frac{3}{8\cdot 9^2\cdot\sqrt[2]{9}}=\frac{3}{8\cdot 81\cdot 3}=\frac{1}{648}.$$

Logo,

$$f(x)=f(9)+\frac{f'(9)}{1!}(x-9)+\frac{f''(9)}{2!}(x-9)^2+\frac{f'''(9)}{3!}(x-9)^3 ,$$

ou seja,

$$f(x)=3+\frac{\frac{1}{6}}{1!}(x-9)+\frac{-\frac{1}{108}}{2!}(x-9)^2+\frac{\frac{1}{648}}{3!}(x-9)^3 ,$$

isto é,

$$f(x)=3+\frac{1}{6\cdot 1}(x-9)-\frac{1}{108\cdot 2}(x-9)^2+\frac{1}{648\cdot 6}(x-9)^3$$

Portanto, a aproximação de Taylor de terceira ordem de $f(x)=\sqrt{x}$ no ponto a=9 é

$$f(x)=\sqrt{x}=3+\frac{1}{6}(x-9)-\frac{1}{216}(x-9)^2+\frac{1}{3888}(x-9)^3.$$

Por exemplo, um valor aproximado de $\sqrt{5}$ seria

$$\sqrt{5}\cong 3+\frac{1}{6}(5-9)-\frac{1}{216}(5-9)^2+\frac{1}{3888}(5-9)^3,$$

ou seja,

$$\sqrt{5}\cong 3+\frac{(-4)}{6}-\frac{(-4)^2}{216}+\frac{(-4)^3}{3888},$$

ou seja,

$$\sqrt{5}\cong 3-\frac{4}{6}-\frac{16}{216}-\frac{64}{3888}$$

$$=3-0,6667-0,0741-0,0165$$

$$=3-0,7572=2,2428.$$

Portanto,

$$\sqrt{5}\cong 2,2428.$$

5.3-Teorema de Weierstrass

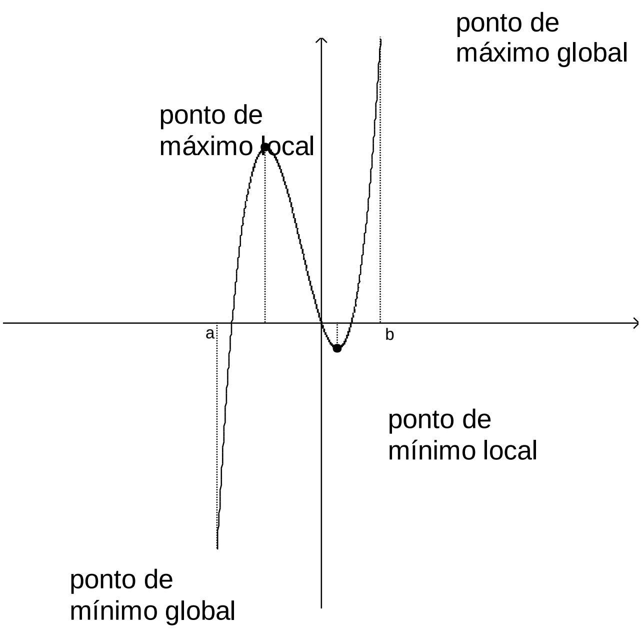
Teorema: Toda função contínua num intervalo fechado [a,b] assume um máximo e um mínimo em [a,b].

Como a sequência é limitada, existe um número positivo M tal que, para todos os índices n, $-M < a_n < M$. Seja X o conjunto dos números x tais que existe uma infinidade de elementos da sequência `a direita de x, isto ´e, $x < a_n$ para uma infinidade de índices n. É claro que $-M \in X$ e M é uma cota superior de X. Tratando-se, pois, de um conjunto não vazio e limitado superiormente, X possui supremo, que designamos por A.

Vamos provar que existe uma subsequência convergindo para A. Começamos provando que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem infinitos índices n tais que $A - \varepsilon < a_n$ e somente um número finito satisfazendo $A + \varepsilon < a_n$. De fato, sendo A o supremo de X, existe $x \in X$ à direita de $A - \varepsilon$ e infinitos a_n à direita desse x, portanto à direita de $A - \varepsilon$; ao mesmo tempo, só pode existir um número finito de elementos an > $A + \varepsilon$; do contrário, qualquer número entre A e $A + \varepsilon$ estaria em X. Seja $\varepsilon = 1$ e a_{n1} um elemento da sequência no intervalo $(A-1, A+ 1)$. Em seguida, seja a_{n2} , com $n_2 > n_1$, um elemento da sequência no intervalo $(A – ½, A + ½)$. Em seguida, seja a_{n3} , com $n_3 > n_2$, um elemento da sequência no intervalo $(A – 1/3 , A + 1/3)$.

Continuando com esse raciocínio, construímos uma subsequência $(x_j) = (a_{nj})$, que certamente converge para A, pois $|xj - A| < 1/j$. E assim a demonstração está completa.

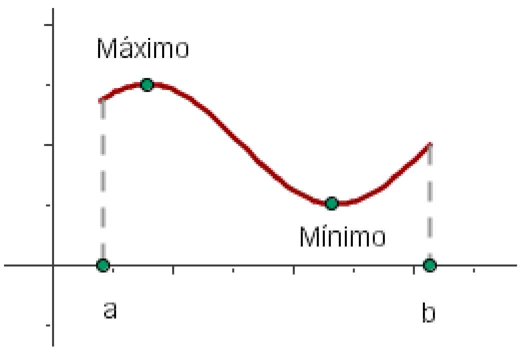
Entretanto, é importante observar que ele garante que uma função, sendo contínua num intervalo fechado, certamente admitirá ponto de extremo, tanto máximo como mínimo, podendo ser interior ao intervalo ou em qualquer das extremidades.



No gráfico observamos que a função admite um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local ambos interiores ao intervalo. Entretanto, o ponto de máximo global da função ocorre na extremidade **b** e o ponto de mínimo global ocorre na extremidade **a** do intervalo. Também é conveniente observar que o Teorema só vale se a função é contínua num intervalo fechado. Se a continuidade for num intervalo aberto, não é possível garantir a existência de máximo e mínimo globais.

Se uma função f(x) está definida e é contínua em um intervalo fechado [a, b], então f(x) possui pelo menos um máximo e um mínimo absolutos no intervalo [a, b]. Isto é, existem, pelo menos, dois pontos x_1, x_2 pertencentes a [a, b] em que f atinge valores extremos absolutos.

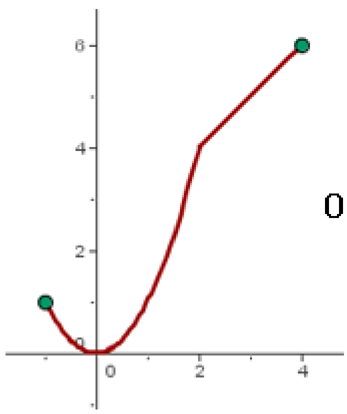
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad Si \ \ x \in [a,b]$$



O **teorema de Weierstrass** não nos indica onde se encontra o máximo e o mínimo, apenas afirma que existem.

Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ \ x < 2 \\ x+2 & si \ \ x \geq 2 \end{cases}$$ é contínua no intervalo [−1, 4]



$$0 \leq f(x) \leq 6 \qquad Si \ \ x \in [-1,4]$$

5.4-Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Seja $f : [a, b] \to R$ uma função contínua. Se $f(a) < y < f(b)$ ou $f(b) < y < f(a)$ então existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$.

Demonstração:

Suponhamos que $f(a) < f(b)$. O caso $f(b) < f(a)$ é análogo. Seja $y \in [f(a), f(b)]$. Queremos encontrar $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = y$. Vamos utilizar o algoritmo da bisseção sucessiva. Sejam $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Denote por x_1 o ponto médio do intervalo $[a_0, b_0]$. Se $f(x_1) < y$, defina $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$, mas se $f(x_1) \geq y$, defina $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_1$. Em ambos os casos temos $f(a_1) \leq y \leq f(b_1)$ e o comprimento do intervalo $[a_1, b_1]$ é metade do intervalo $[a, b]$.

Agora, seja x_2 o ponto médio de $[a_1, b_1]$. Se $f(x_2) < y$, defina $a_2 = x_2$ e $b_2 = b_1$, mas se $f(x_2) \geq y$ defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = x_2$. Novamente, em ambos os casos, teremos $f(a_2) \leq y \leq f(b_2)$ e o comprimento do intervalo $[a_2, b_2]$ será um quarto do intervalo $[a, b]$.

Continuamos bissectando cada intervalo, obtendo uma cadeia de intervalos encaixados

$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$ cujo comprimento converge para zero, pois $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Isto implica que as sequências (a_n) e (b_n) convergem para o mesmo número real, digamos x.

Pela continuidade de f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x)$. Além disso, para cada n, $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$, e pelo *teorema do sanduíche*, obtemos

$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \leq y \leq \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x)$, de onde concluímos que $f(x) = y$, e o teorema está provado.

Corolário: Seja f: $[a, b] \to R$ contínua tal que $f(a).f(b) < 0$. Então existe um número real $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Exemplo:

Seja f: $[0, 1] \to R$ contínua tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$. Prove o mesmo resultado para 1/3 em vez de 1/2.

Solução:

Definimos g: $[0,1/2] \to R$ pondo $g(x) = f(x) - f(x + 1/2)$. Então, g é contínua e $g(0) + g(1/2) = 0$. Isto significa que $g(0)$ e $g(1/2)$ possuem sinais opostos, ou seja, $g(0).g(1/2) < 0$. Pelo TVI existe um número real $c \in [0, 1/2]$ tal que $g(c) = 0$. Logo, $f(c) = f(c + 1/2)$. Considerando 1/3 em vez de 1/2, definimos h: $[0, 2/3] \to R$ pondo $h(x) = f(x) - f(x + 1/3)$. Neste caso, teremos $h(0) + h(1/3) + h(2/3) = 0$. Logo, h muda de sinal em$[0, 1/3]$ ou em $[1/3, 2/3]$. Dessa forma, deve existir $d \in [0, 2/3]$ tal que $h(d) = 0$ ou $f(d) = f(d + 1/3)$.

Exemplo:

Seja p um polinômio de coeficientes reais e grau ímpar. Mostre que p possui pelo menos uma raiz real.

Solução:

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, com $a_n > 0$. Então, para $x \neq 0$,

$$p(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Daí, como *n* é ímpar, é imediato que $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$, de modo que existem *a* e *b* reais, com *a* < 0 < *b*, tais que *p*(*a*) < 0 < *p*(*b*). Pelo **TVI**, *p* tem ao menos uma raiz real.

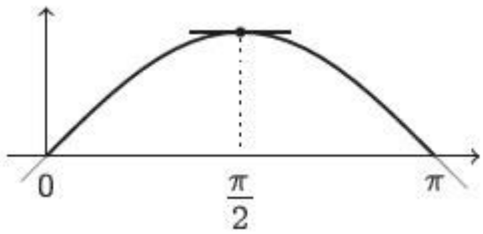
5.5-Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua em [a; b] e derivável em (a; b). Se f(a) = f(b), então existe c pertencente (a; b) tal que

$$f'(c) = 0\,.$$

Exemplo:

Considere f(x) = sen x, e a = 0, b = π. Então f(a) = f(b). Nesse caso, o ponto c cuja existência é garantida pelo teorema é c = $\frac{\pi}{2}$:



De fato, f'(x) = cos x, logo f'($\frac{\pi}{2}$) = 0.

Considere uma função f satisfazendo as seguintes condições:

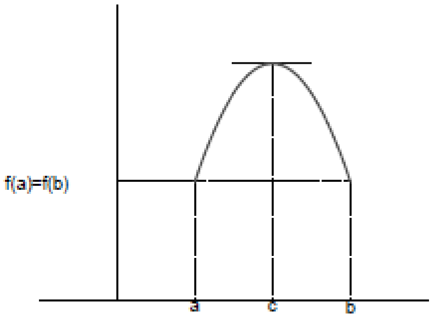
(1) f é contínua no intervalo fechado [a, b]

(2) f é derivável no intervalo aberto (a, b)

(3) f(a) = f(b)

Então, existe um número c em (a, b), tal que, f′(c) = 0.

O teorema de Rolle pode ser interpretado, geometricamente, da maneira descrita a seguir. Seja *f* uma curva suave (contínua e derivável), não constante, ligando os pontos (*a, f*(*a*)) e (*b, f*(*b*)), tal que *f*(*a*) = *f*(*b*). Então, se o gráfico de *f* sobe, deverá descer, e vice-versa. Portanto, como a curva é suave, em algum ponto entre *a* e *b*, onde o gráfico para de subir e começa a descer (ou vice-versa), a reta tangente deve ser horizontal.



***D*emonstração:** Como *f* é contínua em [*a, b*], pelo *teorema dos valores extremos f* assume um valor máximo e um valor mínimo em [*a, b*]. Sejam *m* e *n* os pontos de [*a, b*] onde estes valores são atingidos, isto é, sejam *m* e *n* tais que *f*(*n*) ≤ *f*(*x*) ≤ *f*(*m*), para todo *x* em [*a, b*].

Existem dois casos a serem considerados:

(i) A função f é constante em [a, b].

Neste caso, f(x) = f(a) = f(b) para todo x de [a, b]. Assim, f′(x) = 0 para todo x de (a, b).

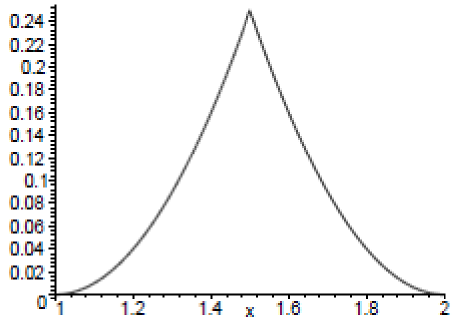
(ii) f(x) ≠ f(a) = f(b) para algum x no intervalo aberto (a, b).

Neste caso, ou m ou n é diferente das extremidades a e b do intervalo considerado. Sem perda de generalidade, suponhamos que seja m este ponto. Como m é um ponto de máximo e está no intervalo aberto (a, b) onde f é derivável, tem-se f′(m) = 0. Logo, o ponto c = m satisfaz a conclusão do teorema.

Observação: As hipóteses do teorema de Rolle são essenciais para que a conclusão se verifique, isto é, se uma das condições do teorema não for verificada, poderá não existir o ponto c que satisfaz f′(c) = 0. Os exemplos a seguir ilustram como este teorema pode ser aplicado e mostram como o teorema falha, caso qualquer uma de suas hipóteses não se verifique.

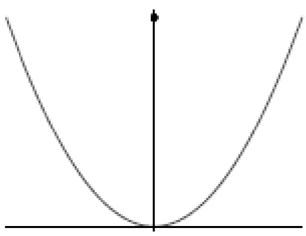
Exemplo 1: Considere a função $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 1 \leq x < 1,5 \\ (x-2)^2, & 1,5 \leq 2 \end{cases}$.

Esta função é contínua no intervalo [1, 2], f(1) = f(2) = 0 mas não é derivável em (1, 2). Repare que não existe nenhum ponto da curva y = f(x) no qual a reta tangente a esta curva seja zero. Em outras palavras, não existe c em (1, 2) tal que f ′ (c) = 0. O teorema de Rolle não pode ser aplicado a este caso porque a função dada não é derivável no intervalo (1, 2)



Exemplo 2: Seja $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

definida no intervalo [−1, 1]. Temos que f(−1) = f(1) = 1, mas f não é contínua no zero. Não existe c em (−1, 1) tal que f ′ (c) = 0. O teorema de Rolle falha neste caso porque f não é contínua em [−1, 1].



AVALIAÇÃO D_1

Esta avaliação corresponde a 50% da nota do quarto módulo.

Nome do (a) cursista: ____

Calcule as integrais a seguir.

a) $\int (x^2 + x^3 - 2x\ )\, dx$

b) $\int \left(\cos x + \frac{1}{2}\, sen\, x - \frac{1}{x}\right)\, dx$

c) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x^3}\right)\, dx$

d) $\int (x+2)^2\, dx$

e) $\int sec^2\, 5x\, dx$

f) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} x\, senx\, dx$

AVALIAÇÃO D$_2$

Esta avaliação corresponde a 50% da nota do quarto módulo.

Nome do (a) cursista: ____

1ª. Questão:

Calcular $\int (7x^4 + sec^2 x)\, dx$.

2ª. Questão:

Calcular$\int \left(3\ \ e^x + \frac{1}{4x} - sen\ x\right) dx$.

3ª. Questão:

O custo fixo de produção da empresa "J & S " é R$8 000, 00. O custo marginal é dado pela função C'(x) = 0,03x² + 0,12 x + 5. Determinar a função custo total.

Obs.: Sabemos que o custo marginal C'(x) é a derivada da função custo total C(x).

4ª. Questão:

O custo marginal para produção de determinado bem, é dado pela função $C'(x) = 18\sqrt{x} + 4$. Se o custo fixo é de R$50, 00, escreva a função custo total.

5ª. Questão:

Calcular $\int_1^3 (x^2\ 4)\, dx$.